# أساسيات الرياضيات للمرحلة الثانوية

MO
academy

# Back To Basics

#Mo_Academy

*أساسيات الرياضيات
للمرحلة الثانوية

محمد إبراهيم
01150780300
القاهرة

بعد عدد طويل من الساعات لتجميع محتوى المذكرة
أحب أقدمها لحضراتكم مجاناً ولوجه الله تعالى.

المذكرة موجهة إلى:

أ - طلبة الصف الثالث الثانوي.
ب - طلبة المرحلة الثانوية بشكل عام.
جـ - طلبة الشهادات المعادلة ومعادلة كلية الهندسة.
د - السادة المدرسين الراغبين بالتحضير.

الهدف: اختصار الوقت والمجهود في البحث ومحاولة
تذكر المعلومات من سنين دراسية سابقة
ولتسهيل عمليات حل المسائل انطلاقاً من أن
الرياضيات بكل فروعها **تراكمية**.

← لك الحق في نسخ وتوزيع وتصوير واستخدام المحتوى
بدون الرجوع لي شخصياً - تذكرنا بالدعاء وانشرها.

← لتنبيهي لأي أخطاء أو اقتراح تعديلات

| | | |
|---|---|---|
| f / Muhammad.egg | oR | Muhammad.egg@gmail.com |
| facebookpage Mo Academy | oR | 01150780300 |

# اللهم انفع بها

# * المحتوى :

١- أساسيات حساب المساحات والحجوم .

٢- أساسيات الجبر .

٣- أساسيات الهندسة المستوية .

٤- أساسيات الهندسة التحليلية .

٥- أهم قوانين حساب المثلثات .

٦- رسم منحنيات الدوال الأساسية .

٧- القواعد الأساسية في التفاضل .

٨- أهم ما سبق دراسته في الاستاتيكا والديناميكا .

# أساسيات الحساب

## ① الجمع والطرح

(أ) العددين لهم نفس الإشارة ∴ اجمع وضع نفس الإشارة.

مثال

$$-٥ - ٣ = -٨$$

$$٩ + ٨ = ١٧$$

(ب) العددين مختلفين في الإشارة ∴ اطرح وضع إشارة الكبير

$$-٩ + ٨ = -١$$

$$١٨ - ٥ = ١٣$$

---

جمع وطرح الأعداد النسبية "الكسور"

← توحيد المقامات

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{ج}{د} = \frac{د\,أ \pm ب\,ج}{ب\,د}$$

مثال

$$\frac{١}{٧} - \frac{١}{٨} = \frac{(١)(٨) - (١)(٧)}{(٨)(٧)} = \frac{٨-٧}{٥٦} = \boxed{\frac{١}{٥٦}}$$

$$\frac{٩}{١٣} + \frac{٨}{٥} = \frac{(٩)(٥) + (٨)(١٣)}{(٥)(١٣)} = \frac{٤٥+١٠٤}{٦٥} = \boxed{\frac{١٤٩}{٦٥}}$$

---

## ② الضرب والقسمة

تذكر قواعد ضرب الإشارات.

• الإشارات مختلفة:

$$(+) * (-) = (-)$$

$$(-) * (+) = (-)$$

• الإشارات متماثلة:

$$(+) * (+) = (+)$$

$$(-) * (-) = (+)$$

نفس الإشارات تطبق نفس القواعد في حالة القسمة

أمثلة

$$3 * 5 = 15$$

$$-8 * 9 = -72$$

$$\frac{-63}{7} = -9$$

---

## * في حالة ضرب الكسور

يتم ضرب $\dfrac{\text{البسط} * \text{البسط}}{\text{المقام} * \text{المقام}}$

أمثلة

$$\frac{-9}{7} * \frac{5}{12} = \frac{(-9)(5)}{(7)(12)} = \boxed{\frac{-45}{84}}$$

• في حالة القسمة يتم قلب الكسر الثاني وتغيير الضرب إلى قسمة.

أمثلة

$$\frac{9}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{9}{\cancel{8}} * \frac{\cancel{8}}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{7}{11} \div \frac{3}{55} = \frac{7}{\cancel{11}_{1}} * \frac{\cancel{55}^{5}}{3} = \frac{(7)(5)}{(1)(3)} = \boxed{\frac{35}{3}}$$

---

## * ترتيب إجراء العمليات الحسابية

مادام بنحل بالعربي اشتغل من اليمين إلى اليسار.

1. الأقواس.
2. الأسس.
3. الضرب والقسمة.
4. الجمع والطرح.

م/ أحمد إبراهيم

---

مثال ①

$$[3 + 5 \times 2 - (9 + 4^2)^2] = 3 + 2 \times 5 - (25)^2$$
$$= 3 + 10 - 625$$
$$= -612$$

مثال ②

$$[6(2 \times 5)^2 - 1200 \div 2] = [6(10)^2 - 600]$$
$$= [6 * 100 - 600]$$
$$= 600 - 600 = \text{صفر}$$

* مجموعات الأعداد

① ع : مجموعة أعداد العد : {١ ، ٢ ، ٣ ، - - - - }

② ط : مجموعة الأعداد الطبيعية : { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، - - - }

③ ص : مجموعة الأعداد الصحيحة : { - - - ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، - - - }

④ ن : مجموعة الأعداد التي يمكن وضعها على الهيئة بسط / مقام "مجموعة الأعداد النسبية"
بشرط أن يكون البسط والمقام كلاهما عدد صحيح .

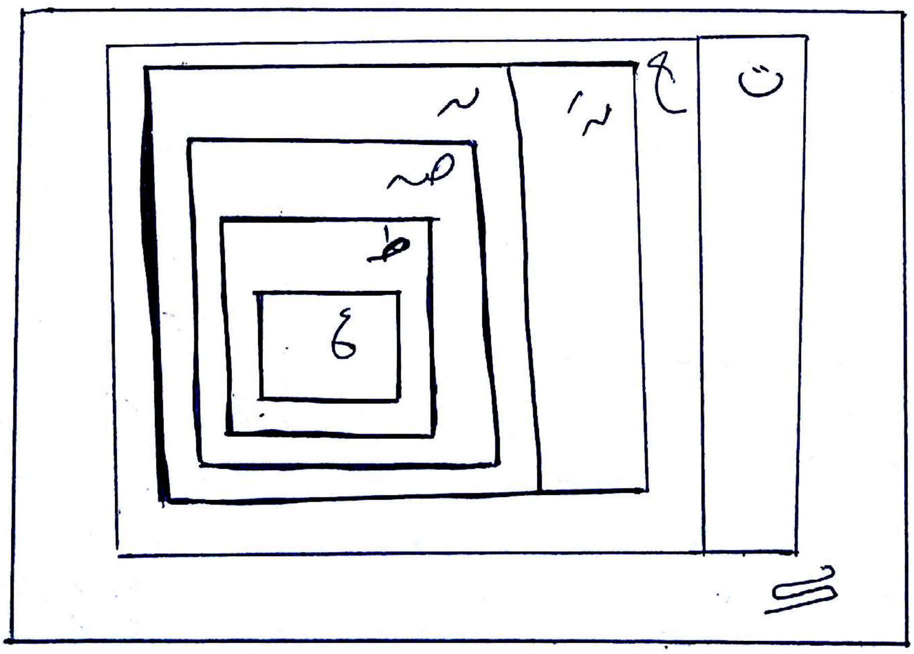
⑤ ح : مجموعة الأعداد الحقيقية
كل الأعداد النسبية ∪ الأعداد الغير نسبية ن'

← لاحظ أن أي رقم عشري غير منتهي وغير دائر هو عدد غير نسبي

مثل ط ≈ ٣،١٤ ، هـ ≈ ٢،٧١٨
الخ

⑥ الأعداد التخيلية : "ت" هي مجموعة جذور الأعداد السالبة . مثل $\sqrt{-9}$ = ٣ ت

⑦ الأعداد المركبة "ك" : هي التي تتكون من جزء حقيقي وجزء تخيلي
مثل ٩ + ٩ت أو -٣ + ٧ت الخ .



## * الفترات

الفترة تحتوى عدد لانهائى من الأرقام

• يتم كتابة الرقم الأصغر يمين الفترة .

• الأقواس * [ ] فترة مغلقة .

* ] [ فترة مفتوحة .

* ] ] أو [ [ فترة نصف مفتوحة نصف مغلقة .

**أمثلة**

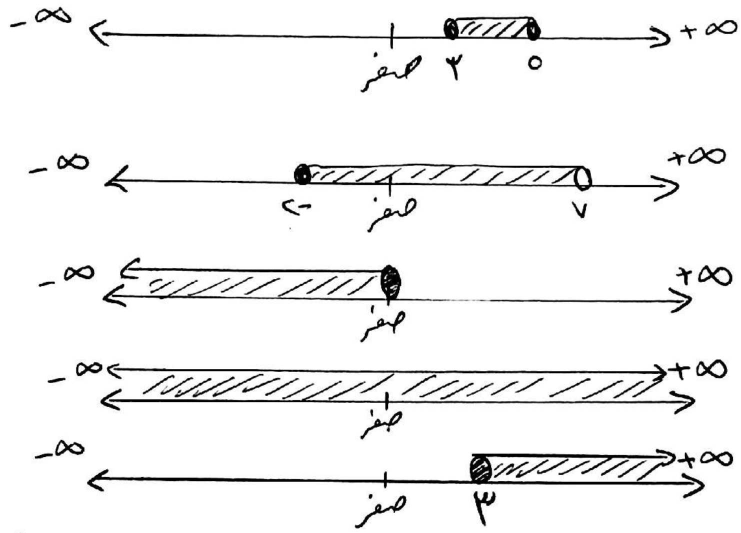
$[3 , 5]$

$[-2 , 7[$

$]-\infty , 0]$

$ح \equiv ]-\infty , \infty[$

$[3 , \infty[$



---

## * الكميات

① **الكميات المعرفة** : كميات محددة و معروفة بالكامل مثل جميع الأعداد الحقيقية .

---

② **الكميات الغير معرفة** : أ- خارج "ناتج" القسمة على صفر

مثل $\frac{5}{صفر}$ ، $\frac{-12}{صفر}$ "ليس لها معنى"

ب- $+\infty$ ، $-\infty$ ويعرفوا بأنهم "أكبر" "أصغر" من أى عدد حقيقى معروف .

عشان كده الأقواس مفتوحة عند ∞ فى الفترات .

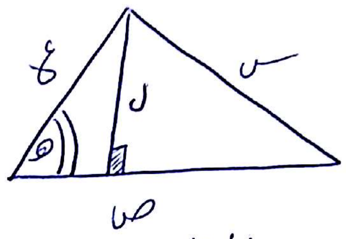
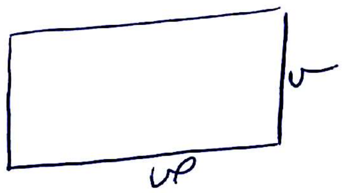
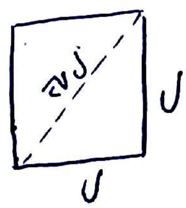
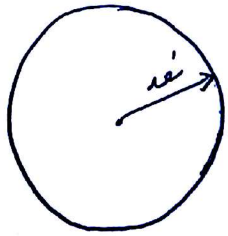
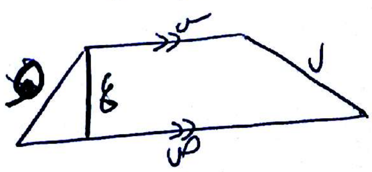
جـ- يقال لجذور الأعداد السالبة "الأعداد التخيلية" للأعداد المركبة أنها غير معرفة فى (ح) .

---

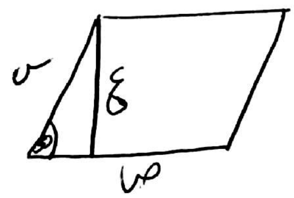
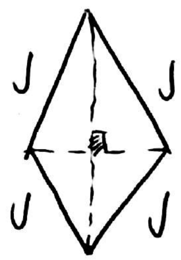
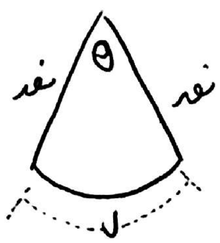
③ **الكميات الغير معينة** : مثل $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $(صفر)^{\infty}$ ، $(\infty)^{صفر}$ ، ......

Scanned by CamScanner

# * المسطحات

| الشكل | المحيط | المساحة |
|---|---|---|
|  المثلث | س + ص + ع | ** ( $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{2}$ ص ل )<br>** ( $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهم ).<br>= $\frac{1}{2}$ ص ع جا هـ . |
| المستطيل  | ٢ ( س + ص ) | س ص |
| المربع  | ٤ ل | ① ل$^{2}$<br>② $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره |
| الدائرة  | ٢ ط نق | ط نق$^{2}$ |
| شبه المنحرف .  | س + ص + ع + هـ | * $\frac{\text{مجموع القاعدتين المتوازيتين}}{2}$ * ع<br>* القاعدة المتوسطة * ع |

Scanned by CamScanner

| الشكل | المحيط | المساحة |
| --- | --- | --- |
| متوازي الأضلاع   | ٢(س+ص) | • القاعدة * الارتفاع = ص ع .<br>• حاصل ضرب ضلعين * جيب الزاوية المحصورة .<br>= س ص جا هـ . |
| المعين   | ٤ ل | • مثل متوازي الأضلاع .<br>بالإضافة • ½ حاصل ضرب القطرين .<br>[illegible] |
| القطاع الدائري   | ٢نق + ل | * θ بالتقدير الدائري .<br>نسبة من مساحة الدائرة<br>$\frac{\theta}{2\cancel{\pi}} * \cancel{\pi}$ نق$^2$ = $\frac{\theta}{2}$ نق$^2$ |
| القطعة الدائرية   | س + ل | * مساحة القطاع الدائري<br>- مساحة Δ<br>= $\frac{\theta}{2}$ نق$^2$ - ½ نق$^2$ جا θ |

# المجسمات

## ← قوانين عامة للمجسمات القائمة منتظمة المقطع

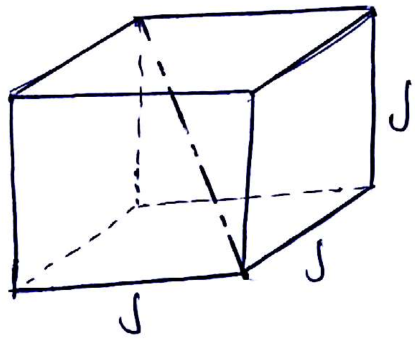
الحجم = مساحة القاعدة * الارتفاع

المساحة الجانبية = محيط القاعدة * الارتفاع .

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين .

---

## (١) المكعب




الخواص * كل الأحرف متساوية فى الطول وعددها (١٢)

* له (٨) رؤوس .

* كل الأوجه متطابقة "مربعات" .

الحجم = $ل^٣$

المساحة الجانبية = ٤ $ل^٢$

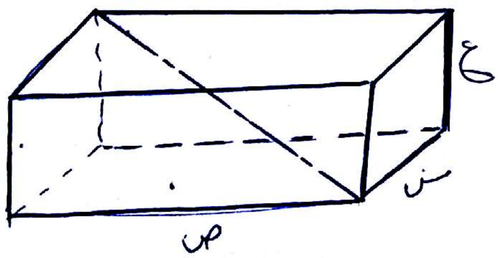
المساحة الكلية = ٦ $ل^٢$

مساحة الوجه الواحد = $ل^٢$

طول القطر = ل $\sqrt{٣}$ "وكل الأقطار متساوية"

---

## (٢) متوازى المستطيلات




الخواص * الأحرف المتوازية متساوية فى الطول وعدد الأحرف = (١٢)

* له (٨) رؤوس و (٦) أوجه .

* كل وجهين متقابلين متطابقين .

الحجم = الطول * العرض * الارتفاع = س ص ع .

المساحة الجانبية = ٢(س + ص) * ع .

المساحة الكلية = [٢(س + ص) * ع] + ٢ س ص

طول القطر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

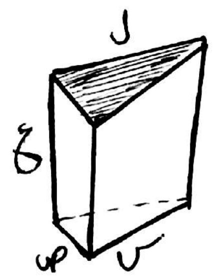
م/ محمد ابراهيم

Scanned by CamScanner

## * ③ المنشور الثلاثي القائم

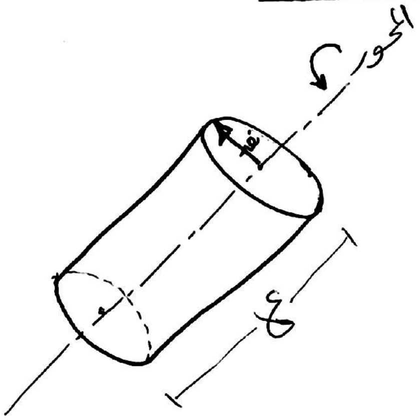
• عدد الأوجه = ٥
• عدد الرؤوس = ٦
• عدد الأحرف = ٩

* القاعدتين المتقابلتين متطابقتين
* الحجم = مساحة القاعدة * ع .
* المساحة الجانبية = (س+ص+ل) ع




---

## * ④ الأسطوانة القائمة



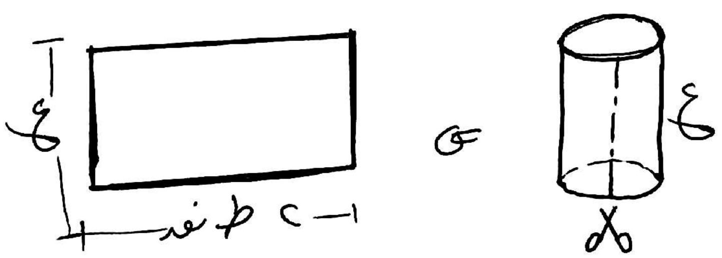

• هي المحل الهندسي لمستقيم يتحرك موازياً لآخر - المحور - وعلى بُعد ثابت منه .

الحجم = (ط نق²) * ع .

المساحة الجانبية = (٢ ط نق) * ع

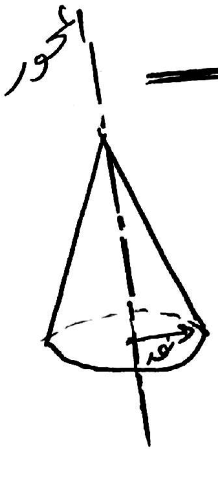
المساحة الكلية = ٢ ط نق ع + ٢ (ط نق²)

← يمكن تخيل المساحة الجانبية للأسطوانة كالتالي :




---

## * ⑤ المخروط القائم




• هو المحل الهندسي لدوران مستقيم مثبت من أحد طرفيه على مستقيم آخر - المحور .

غير منتظم المقطع

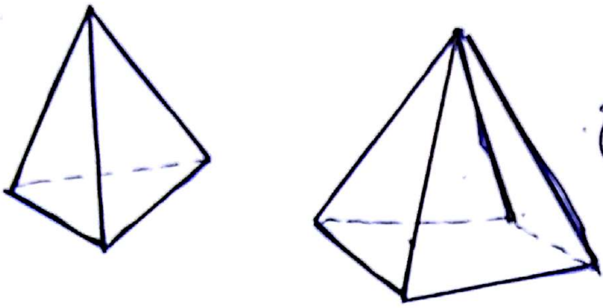
* الحجم = ١/٣ مساحة القاعدة * الارتفاع .
= ١/٣ (ط نق²)(ع) .

* المساحة الجانبية = ١/٢ محيط القاعدة ع .

Scanned by CamScanner

## * ⑥ الهرم

. يمكن أن يكون ثلاثي أو رباعي أو - - - .

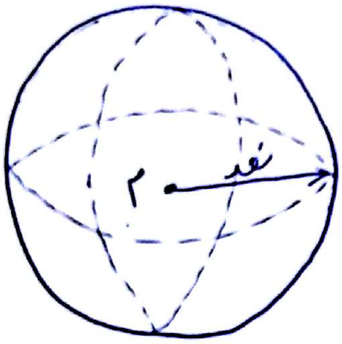


* الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة * الارتفاع .

* المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة * ع .

* المساحة الكلية = الجانبية + القاعدة .

## * ⑦ الكرة



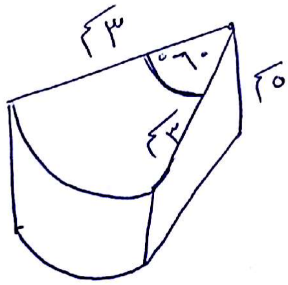

المساحة = ٤ (ط نق²)

الحجم = $\left(\frac{٤}{٣}\right)$ ط نق³

م/ محمد ابراهيم

Sheet ١

في الشكل المقابل *احسب مع استنتاج القوانين

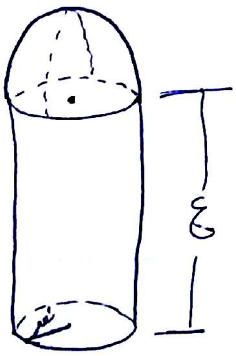



١ الحجم =

٢ المساحة الجانبية =

٣ المساحة الكلية =

د/ محمد إبراهيم




نق = ٤م

ع = ٦م

١ الحجم =

٢ المساحة الكلية =

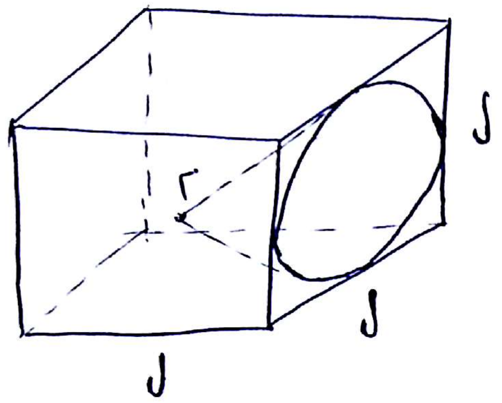
* اعتبر أن المخروط عبارة عن فراغ

احسب :

١) الحجم =

٢) المساحة الجانبية =

٣) المساحة الكلية =

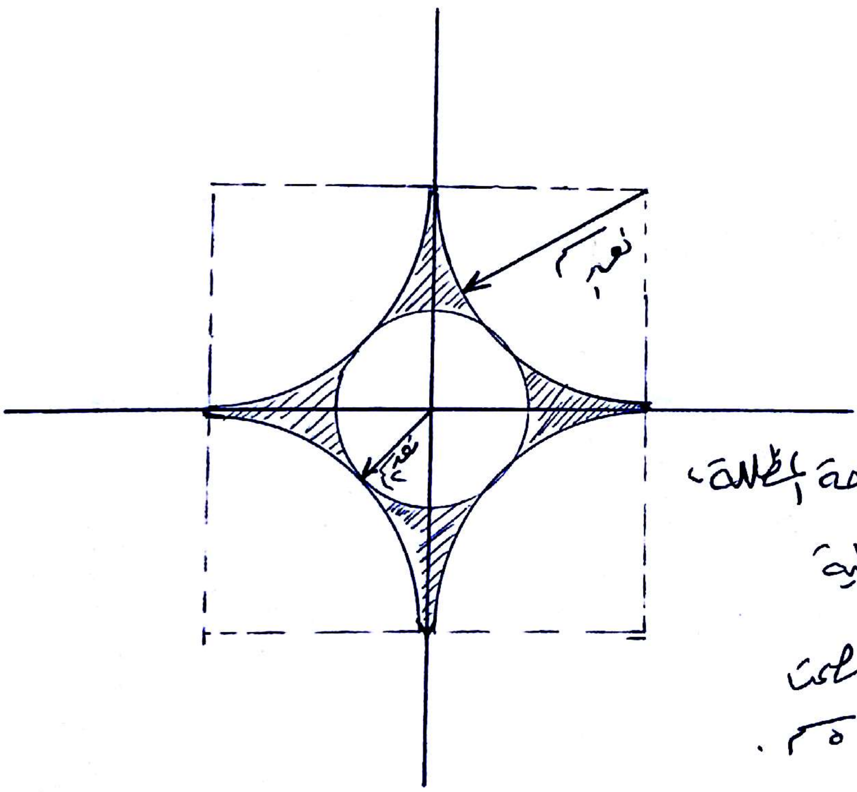



الطول = العرض = الارتفاع = ل

م : مركز المجسم

---

١) أوجد مساحة المنطقة المظللة




٢) اعتبر هذا مجسم قاعدته هذه المساحة المظللة، أوجد مساحته الجانبية والكلية وحجم المادة اللازمة لصنعه علماً بأن ارتفاعه ٥ سم .

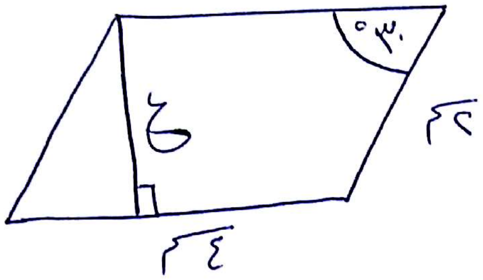
نق١ = ٢ سم

نق٢ = (٢$\sqrt{٢}$ - ٢) سم

Scanned by CamScanner

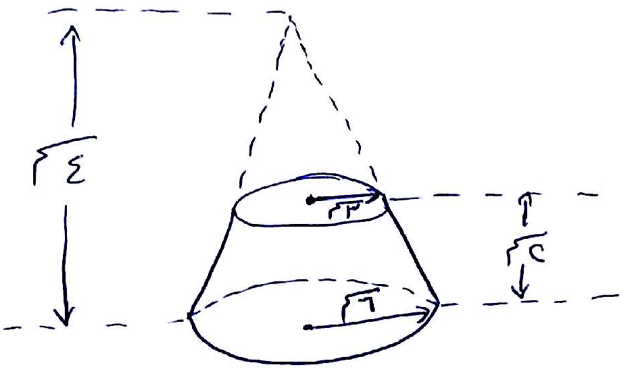
* في الشكل المقابل :

" احسب ع "



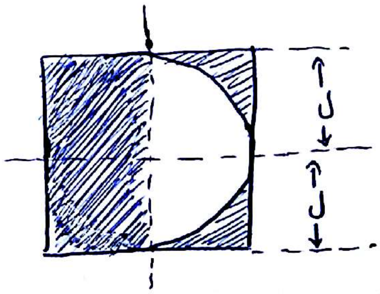

---

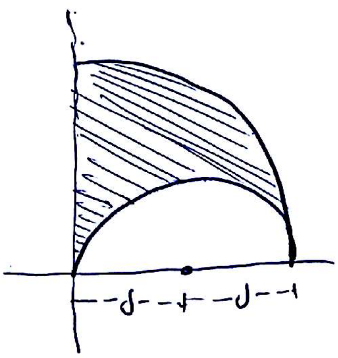
* احسب حجم هذا الجسم

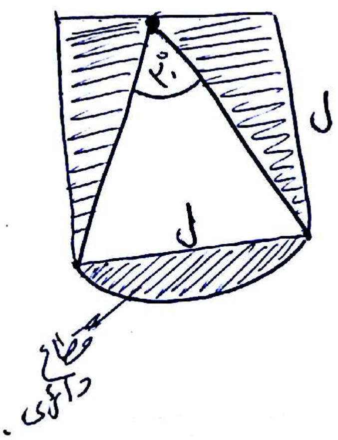



---

* احسب مساحات المظللة فيما يلي :



# أساسيات الجبر

① الحد الجبري والمقدار الجبري

الحد الجبري: هو ما يحتوي على مجاهيل أو متغيرات

مثال: ١٠ س ص ، ٣ س ، -١٤ ص

المقدار الجبري: هو ما يحتوي على مجموع عدة حدود جبرية.

مثال: ١٠ س ص + ٣ س

١٤ ص - ٢٠ س

• العمليات على الحدود والمقادير الجبرية.

(I) التجميع ← يتم تجميع الحدود الجبرية المتشابهة فقط

مثال أوجد في أبسط صورة

١٢ س + ١٠ س$^{٢}$ - ٩ ص - ٣ س + ٤ ص + $\frac{٥}{٢}$ س$^{٢}$

= $\frac{٣٥}{٢}$ س$^{٢}$ + ٩ س - ٥ ص #

(II) الضرب ←

* يتم ضرب الإشارات ①
* يتم ضرب الأرقام. ②
* تجميع أسس الرموز المتشابهة. ③

مثال: (-١٢ س ص) × ($\frac{١}{٣}$ س$^{٢}$ ص$^{٣}$)

= -٤ س$^{٢+١}$ ص$^{٣+١}$ = $\boxed{\text{-٤ س}^{٣}\text{ ص}^{٤}}$

(III) القسمة ←

* الإشارات
* الأرقام
* طرح أسس الرموز المتشابهة.

مثال: $\frac{\text{٢٥ س}^{٣}\text{ ص}^{٩}}{\text{-٥ س}^{٢}\text{ ص}^{٣}}$ = -٥ س$^{٣-٢}$ ص$^{٩-٣}$ = $\boxed{\text{-٥ س ص}^{٦}}$

* كثيرات الحدود :

• دالة محتوية على نفس المتغير؟ وكل الأسس (صحيحة)

← تحدد درجة كثيرة الحدود بدرجة أعلى حدودها .

مثال

* $س^٤ + ص + ٥س^٣$ *كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

* $س ص + ص^٣ + ص س^٤$ *كثيرة حدود من الدرجة الخامسة .

* $س\ جاس + ٧\sqrt{س} + ص^٤$ *ليست كثير حدود

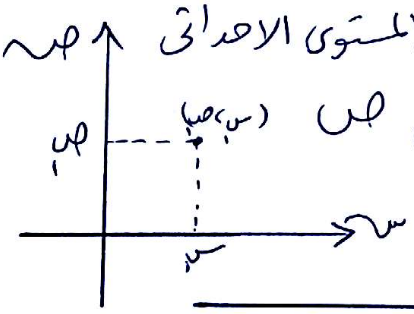
---

* أنواع المتغيرات :

① المتغير المستقل "س" يأخذ قيمته أولاً (independent variable)

② المتغير التابع "ص" يأخذ قيمته بناءً على المتغير المستقل (dependent variable)

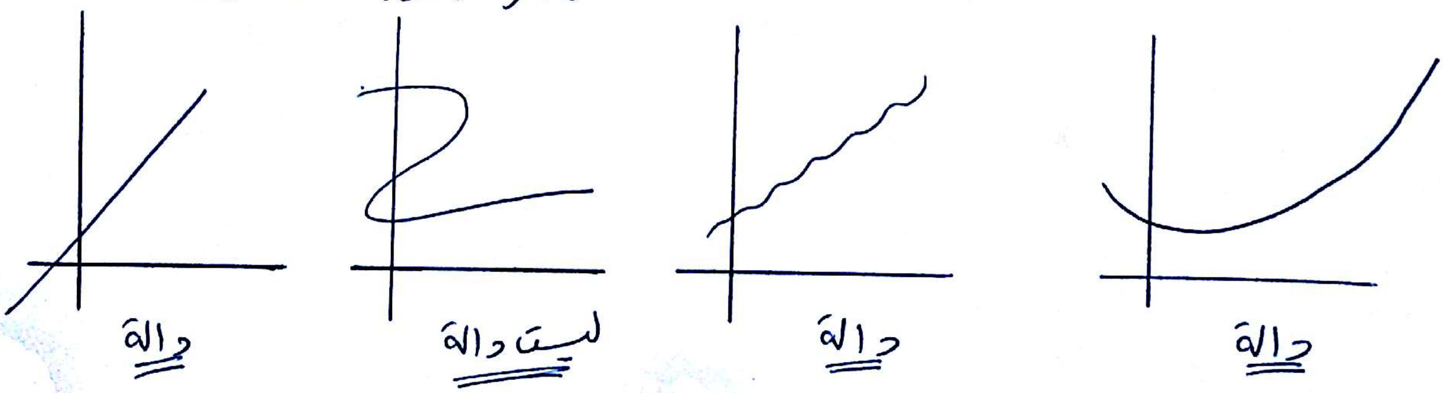
← يمكن تمثيل أي علاقة بين س ، ص في المستوى الاحداثي باعتبار أن المحور الأفقي يمثل س ، والرأسي يمثل ص وأي نقطة هي زوج مرتب (س ، ص)




---

* الدالة : هي علاقة بين متغيرين بحيث كل قيمة للمتغير المستقل (س) تقابلها "تعطي أو تنتج" قيمة واحدة و واحدة فقط للمتغير التابع (ص)

← اختبار الخط الرأسي : إذا قطع المنحنى في نقطة واحدة ∴ دالة .
إذا " " في أكثر من نقطة ∴ ليست دالة .



## * المجال والمدى

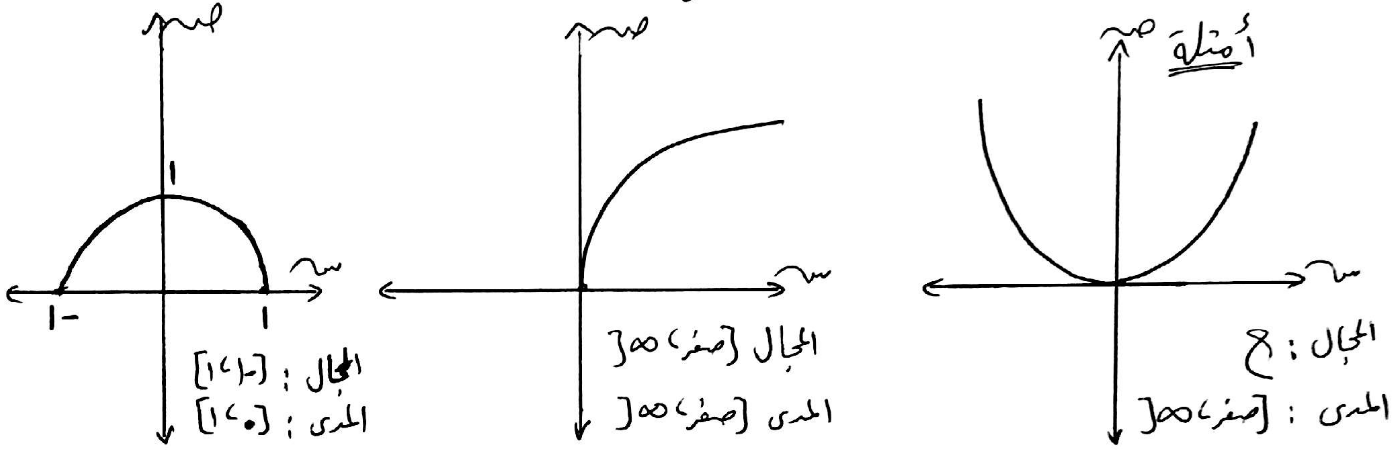
• مجال الدالة: هي القيم الممكنة المتاحة للمتغير المستقل "س"

← يمكن تحديد المجال بمجرد النظر إلى إسقاط الدالة على محور "س"

• مدى الدالة: هي قيم المتغير التابع "ص"

← يمكن تحديد المدى بمجرد النظر إلى إسقاط الدالة على محور "ص"

أمثلة




المجال: ح
المدى: [صفر، ∞[

المجال [صفر، ∞[
المدى [صفر، ∞[

المجال: [-١، ١]
المدى: [٠، ١]

← لاحظ أن الرسم للمنحنى يعبر عن العلاقة بين المتغيرين.

---

## التحليل

* إعادة كتابة العلاقة أو الدالة في صورة أبسط

### ① التحليل بإخراج العامل المشترك:

* استخرج أكبر رقم ممكن القسمة عليه لكل الحدود.
* استخرج الرمز بأكبر أس ممكن طرحه.

مثال

* $15\,\text{س}^2\text{ص}^3 - 25\,\text{س}^3\text{ص}^2 = 5\,\text{س}^2\text{ص}^2(3\,\text{ص} - 5\,\text{س})$
* $\text{س}^2 - \text{س} = \text{س}(\text{س} - 1)$
* $12\,\text{ص}^3 - 5\,\text{ص}^4 = \text{ص}^3(12 - 5\,\text{ص})$
* $4\,\text{س}^3 + 2\,\text{ص}\,\text{س}^2 = 2(\text{س}^2)(2\,\text{س} + \text{ص})$

## ② المقدار التربيعي

### ⓐ المقدار التربيعي البسيط

على الصورة س² + ب س + جـ

س² − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضربهما)

أمثلة * س² + ٥ س + ٦

= (س + ٣)(س + ٢)

* س² − س − ١٢

= (س + ٣)(س − ٤)

م/ محمد ابراهيم

### ⓑ المقدار التربيعي (الغير البسيط) :

على الصورة أ س² + ب س + جـ

* ٣ س² + ٥ س − ٢

= (٣ س − ١)(س + ٢)

* ٢ س² + ٥ س − ٣

= (٢ س − ١)(س + ٣)

٣ س    − ٢

س    ١

٣ س − ٢ س = س × مرفوضة

(٣ س    − ١)

(س    + ٢)

٦ س − س = ٥ س ✓

(٢ س    − ١)

(س    + ٣)

٦ س − س = ٥ س ✓

## (٤) الفرق بين المربعين

$(س^{٢} - ٤) = (س - ٢)(س + ٢)$

$(س^{٢} - ٩) = (س - ٣)(س + ٣)$

$س^{٢} + ١٦ =$ لا تحلل "مجموع مربعين"

$س^{٦} - ٦٤ = (س^{٣} + ٨)(س^{٣} - ٨)$

$س - ٢٥ = (\sqrt{س} - ٥)(\sqrt{س} + ٥)$

* الفرق بين مربعين مركب

$(س + ١)^{٢} - ٥ =$

$= [\sqrt{\ }\ (\pm)\ \sqrt{\ }]\,[\sqrt{\ }\ (\pm)\ \sqrt{\ }]$

$= (\sqrt{\ }\ (\pm)\ \sqrt{\ })$

---

## (٥) المربع الكامل ← مقدار ثلاثي (بسيط / أو غير بسيط) ينتج بعد تحليله قوسين متماثلين.

$س^{٢} - ٤س + ٤ = (س - ٢)(س - ٢) = (س - ٢)^{٢}$

$س^{٢} + ٦س + ٩ = (س + ٣)(س + ٣) = (س + ٣)^{٢}$

---

## (٣) المقدار التكعيبي

(أ) الفرق بين مكعبين: $س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$

$س^{٣} - ٨ = (س - ٢)(\underbrace{س^{٢} + ٢س + ٤}_{\text{لا يحلل}})$

$س^{٦} - ٦٤ = (س^{٢} - ٤)(س^{٤} + ٤س^{٢} + ١٦)$

$= (س - ٢)(س + ٢)(س^{٤} + ٤س^{٢} + ١٦)$

(ب) مجموع مكعبين: $س^{٣} + ب^{٣} = (س + ب)(س^{٢} - ب س + ب^{٢})$

* $س^{٣} + ٢٧ = (س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)$

* $(س + ٥)^{٣} + ١٠ = ((س + ٥) + \sqrt[٣]{١٠})((س + ٥)^{٢} - \sqrt[٣]{١٠}(س + ٥) + \sqrt[٣]{(١٠)^{٢}})$

## ④ التحليل بالتقسيم : يتم التحليل على خطوتين

① اخراج عامل مشترك مناسب ليتبقى نفس القوس .

② اخراج القوس نفسه عامل مشترك .

**مثال ①**

أ جـ + ب د + أ د + ب جـ = أ جـ + أ د + ب د + ب جـ

= أ (جـ + د) + ب (د + جـ)

= (جـ + د) (أ + ب)

م/ أحمد إبراهيم

---

**مثال ②**

س$^{٣}$ + س$^{٢}$ + س + ١

= س$^{٢}$ (س + ١) + (س + ١)

= (س + ١) (س$^{٢}$ + ١)

---

## ⑤ القسمة المطولة

أوجد في أبسط صورة $\dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ١٤\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣}$

- بإجراء القسمة المطولة

الناتج: س$^{٢}$ + ٥س + ١

المقسوم عليه: س − ٣

| |
|---|
| س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ − ١٤س − ٣ |
| س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ |
| ٥س$^{٢}$ − ١٤س − ٣ |
| ٥س$^{٢}$ − ١٥س |
| س − ٣ |
| س − ٣ |
| ٠ ٠ |

∴ المقدار = $\boxed{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١}$

**اختصر** $\dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}{\text{س} + ١}$

- بإجراء القسمة المطولة

الناتج: س$^{٢}$ + س + ٣

المقسوم عليه: س + ١

| |
|---|
| س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ + ٤س + ٣ |
| س$^{٣}$ + س$^{٢}$ |
| س$^{٢}$ + ٤س + ٣ |
| س$^{٢}$ + س |
| ٣س + ٣ |
| ٣س + ٣ |
| ٠ ٠ |

∴ المقدار = $\boxed{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣}$

Back to Basics

* القسمة المطولة والقسمة التركيبية .

س - ١ = ٠

س = ١

مثال ①

أوجد (س³ + ٣س² - س - ٣) ÷ (س - ١)

① القسمة المطولة

س² + ٤س + ٣

(س - ١) ) س³ + ٣س² - س - ٣

- (س³ - س²)

٤س² - س - ٣

- (٤س² - ٤س)

٣س - ٣

- (٣س - ٣)

٠ ٠

ناتج القسمة = س² + ٤س + ٣

② القسمة التركيبية .

| ١ | ٣ | ١- | ٣- | ١ |
|---|---|---|---|---|
| | ١ | ٤ | ٣ | |
| ١ | ٤ | ٣ | ٠ | |
| س² | س | الحد المطلق | الباقي | |

الناتج س² + ٤س + ٣

Final Answer س² + ٤س + ٣

مثال ٥

أوجد $\dfrac{س^3 + 3س^2 - س - 3}{س^2 + 4س + 3}$

$س^2 + 4س + 3 = (س + 3)(س + 1)$

المقدار $= \dfrac{س^3 + 3س^2 - س - 3}{(س + 3)(س + 1)}$

الخطوة الأولى

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | −1 | −3 | −3 |
| | −3 | 0 | 3 | |
| 1 | 0 | −1 | 0 الباقي | |
| $س^2$ | س | الحد المطلق | | |

الخطوة ٢

$= (س^2 - 1) * (س - 3)$

$= س^3 + 3س^2 - ~~3س^2~~$

$- س - 3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | −1 |
| | −1 | 1 | |
| 1 | −1 | 0 الباقي | |

خارج القسمة

$س - 1$

(Final Answer) $س - 1$

## ملاحظة ١

مثال تمهيدى ⇐ أوجد $\frac{15}{7}$

$\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7} = \boxed{2\frac{1}{7}}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 15 \\ & 14 \\ \hline & 1 \end{array} \quad 2$$

## مثال ٣

أوجد $\dfrac{\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 4\text{س} + 4}{\text{س} + 1}$

### ① القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ & & -1 & -1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

الباقي 1

$\text{س}^2 + \text{س} + 3 + \dfrac{1}{\text{س} + 1}$

### ② القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & \text{س}^2 + \text{س} + 3 \\ \hline \text{س} + 1 & \text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 4\text{س} + 4 \\ & -(\text{س}^3 + \text{س}^2) \\ \hline & \text{س}^2 + 4\text{س} + 4 \\ & -(\text{س}^2 + \text{س}) \\ \hline & 3\text{س} + 4 \\ & -(3\text{س} + 3) \\ \hline & 1 \end{array}$$

الباقي $\boxed{1}$

$\text{س}^2 + \text{س} + 3 + \dfrac{1}{\text{س} + 1}$

Final Answer $\dfrac{1}{\text{س} + 1} + 3 + \text{س} + \text{س}^2$

# * إكمال المربع

لدينا المقدار $أ س^2 \pm ب س + جـ$ والهدف ← وضعه على صورة المربع الكامل

* طرح الثابت جـ بره الموضوع

① اجعل معامل $س^2 = 1$

$$أ \left[ س^2 \pm \frac{ب}{أ} س \right] + ~~جـ~~$$

$\frac{1}{2}$

② $$أ \left[ \left( س \pm \frac{1}{2} \left( \frac{ب}{أ} \right) \right)^2 - \left( \frac{ب}{أ} \right)^2 \right] + جـ$$

$-(\ )^2$

---

مثال ①

$$س^2 + 4 س + 6$$

$$= \left[ (س + 2)^2 - (4) \right] + 6$$

$$= \boxed{(س + 2)^2 + 2} \quad *$$

---

مثال ②

$$2 س^2 + 12 س + 15$$

$$= 3 \left[ س^2 + 4 س \right] + 15$$

$$= 3 \left[ (س + 2)^2 - (4) \right] + 15$$

$$= 3 (س + 2)^2 - 12 + 15$$

$$= \boxed{2 (س + 2)^2 + 3} \quad *$$

م/ محمد إبراهيم

* الأسس

① $\text{أ}^{0} = 1$ ② $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{1}{\text{أ}^{\text{ن}}}$

③ $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$ "عند تشابه الأساسات تجمع الأسس" (في حالة الضرب)

④ $\frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$ "تطرح الأسس" (في حالة القسمة)

⑤ $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}\text{ن}}$

⑥ $(\text{أ}\,\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$

⑦ $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$

⑧ $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = \text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ مثال $\sqrt[3]{\text{س}^{2}} = \text{س}^{\frac{2}{3}}$

---

* فك المقادير الجبرية:

ذات حدين

① القوس التربيعي: $(\text{أ} \pm \text{ب})^{2} = \text{أ}^{2} \pm 2\text{أ}\text{ب} + \text{ب}^{2}$

② القوس التكعيبي:

$(\text{أ} \pm \text{ب})^{3}$ = مكعب الأول + مكعب الأخير + (مربع الأول * الثاني * ٣) + (مربع الثاني * الأول * ٣)

$= \text{أ}^{3} + \text{ب}^{3} + (\pm 3\text{أ}^{2}\text{ب}) + (3\text{ب}^{2}\text{أ})$

---

* أكثر من حدين: بالطريقة التقليدية

$(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})(\text{د} + \text{هـ} + \text{و})$

$= \text{أد} + \text{أهـ} + \text{أو} + \text{ب د} + \text{ب هـ} + \text{ب و} + \text{جـ د} + \text{جـ هـ} + \text{جـ و}$

## قوانين اللوغاريتمات :

أ/ محمد إبراهيم

① $لو_{أ} س = ب \Leftrightarrow أ^{ب} = س$

② $لو\, س ص = لو\, س + لو\, ص$

③ $لو \frac{س}{ص} = لو\, س - لو\, ص$

④ $لو\, س^{ن} = ن\, لو\, س$

⑤ $لو_{ب} أ = \frac{لو\, أ}{لو\, ب} = \frac{لو_{ن} أ}{لو_{ن} ب}$

⑥ $لو_{أ} أ^{س} = س$

⑦ $لو_{أ} أ = لو\, ١٠ = \boxed{1}$

⑧ $لو_{أ} ١ = $ صفر .

## قوانين المتتابعات :

### (أ) الحسابية

$ح_{ن}$ : الحد العام

ء : أساس المتتابعة

أ : الحد الأول

ل : الحد الأخير

① * $ح_{ن} = أ + (ن - 1)\, ء$

حيث ن : رتبة الحد

② * $ء = ح_{ن+1} - ح_{ن} = جـ_{ن+1} - جـ_{ن} - أ$

$جـ_{ن} - جـ_{ن-1} = ح_{ن}$

③ * $جـ_{ن} = \frac{ن}{2}(أ + ل) = \frac{ن}{2}(2أ + (ن-1)ء)$

④ * $ح_{ن-1}$ ، $ح_{ن}$ ، $ح_{ن+1}$ ثلاث حدود في تتابع حسابي

يكون $ح_{ن}$ هو الوسط الحسابي للثلاث أعداد.

$ب = \frac{أ + جـ}{2}$ ، $2ب = أ + جـ$

### (ب) الهندسية :

$ح_{ن}$ : الحد العام

ر : أساس المتتابعة .

أ : الحد الأول

ل : الحد الأخير

① * $ح_{ن} = أ\, ر^{ن-1}$

حيث ن : رتبة الحد .

② $ر = \frac{ح_{ن+1}}{ح_{ن}}$

③ $جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - 1)}{ر - 1}$ حيث ر ≠ 1

$= \frac{ل\, ر - أ}{ر - 1} = \frac{أ(1 - ر^{ن})}{1 - ر} = \frac{أ - ل\, ر}{1 - ر}$

$\xrightarrow{\text{عندما } ر = 1} جـ_{ن} = أ\, ن$

④ إذا كان $|ر| < 1 \Leftarrow جـ_{\infty} = \frac{أ}{1 - ر}$

⑤ الوسط الهندسي للعددين أ ، جـ : $ب = \pm\sqrt{أ\, جـ}$

⑥ الوسط الحسابي ≥ الوسط الهندسي .

## * حل المعادلات

### أ) إذا كانت من الدرجة الأولى "أعلى أس هو ①"

① المجهول في طرف والأرقام في طرف.

② اقسم على معامل المجهول.

**مثال**

$٣س + ٧ = ١٠$

$\therefore ٣س = ١٠ - ٧ \Leftarrow \frac{\cancel{٣}س}{\cancel{٣}} = \frac{٣}{٣}$

$\boxed{س = ١}$

### ب) إذا كانت مرفوعة مربعة أو مكعبة أو مجموع مكعبة

نفس طريقة الدرجة الأولى

ثم آخر خطوة (جذر للطرفين)

**مثال** ① $\frac{٢س^{٣}}{٢} = \frac{٨١}{٢} \Leftarrow \sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧}$

$\boxed{\therefore س = ٣}$

② $٢س^{٢} - ٢ = ٦$

$٢س^{٢} = ٨ \Leftarrow س^{٢} = ٤ \Leftarrow \boxed{س = \pm ٢}$

عند أخذ الجذر التربيعي يكون الناتج ($\pm$)

### ج) إذا كانت مقدار تربيعي "استخدم التحليل"

① $س^{٢} - ٥س + ٦ = \text{صفر}$

$(س - ٢)(س - ٣) = \text{صفر}$

إما $س - ٢ = \text{صفر}$ | أو $س - ٣ = \text{صفر}$

$\boxed{س = ٢}$ | $\boxed{س = ٣}$

**لاحظ**

إذا كان أ ب = صفر

∴ إما أ = صفر

أو ب = صفر.

أو أ، ب = صفر معاً

Scanned by CamScanner

م/ أحمد إبراهيم

② ٢س² + ٥س − ٢ = صفر

(٢س − ١) (س + ٢) = صفر

| إما | أو |
|---|---|
| ٢س − ١ = ٠ | س + ٢ = صفر |
| س = ١/٢ | س = −٢ |

---

③ (س + ٢)² − س − ١٤ = صفر.

**حل ①**

(س + ٢)² − (س + ٢) + ٢ − ١٤ = ٠

بوضع (س + ٢) = م

∴ م² − م − ١٢ = ٠

(م − ٤) (م + ٣) = ٠

(س + ٢ − ٤) (س + ٢ + ٣) = ٠

(س − ٢) (س + ٥) = ٠

س = ٢ ، س = −٥

**حل ②**

س² + ٤س + ٤ − س − ١٤ = ٠

س² + ٣س − ١٠ = ٠

(س − ٢) (س + ٥) = صفر

س = ٢ ، س = −٥

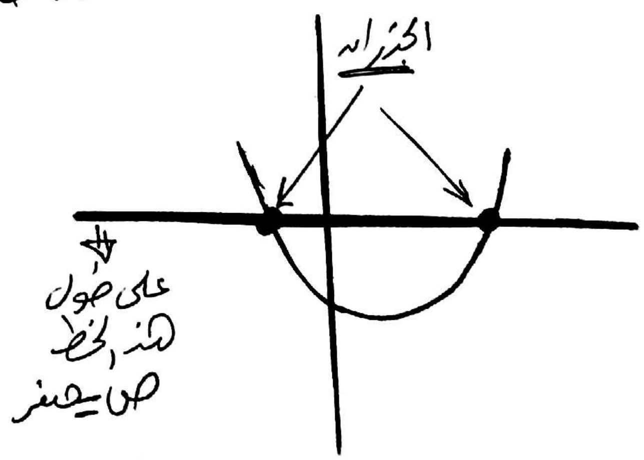
---

* المعنى الهندسي لجذور المعادلة "أو أصفار المعادلة".

إذا اعتبرنا معادلة ⇐ فإنك تضعها = صفر

∴ ص = صفر.

لاحظ أنك إذا عوضت بالجذور في المعادلة فإنك تجعلها = صفر.



* **القانون العام**

← لإيجاد جذور المعادلة التربيعية .

إذا كان $أ س^2 + ب س + جـ = $ صفر .

فإن الجذور $\boxed{س_{1،2} = \dfrac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2أ}}$

المقدار $ب^2 - 4 أ جـ$ يسمى المُميز (Discriminent)

إذا كان:
- $(+)$ ∴ للمعادلة جذران حقيقيان
- صفر ∴ للمعادلة جذر واحد قيمته $\left(\dfrac{-ب}{2أ}\right)$
- $(-)$ ∴ للمعادلة جذران تخيليان "مركبان"

---

**مثال ①** باستخدام القانون العام أوجد جذور المعادلة

$س^2 - 5 س + 6 = $ صفر

$أ = 1$ ، $ب = -5$ ، $جـ = 6$

∴ $س_{1،2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\boxed{س_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3}$

$\boxed{س_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2}$

---

**أوجد جذور المعادلة** $س^2 + 2س + 4 = $ صفر

$أ = 1$ ، $ب = 2$ ، $جـ = 4$

| |
|---|
| $ب^2 - 4 أ جـ$ |
| $= 4 - (4)(1)(4)$ |
| $= 4 - 16$ |
| $= -12$ |

ببحث قيمة المميز ← سالب

∴ لا توجد جذور حقيقية .

Scanned by CamScanner

* أوجد جذور المعادلة $س^{2} - 4س + 4$

أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ٤

$س_{1،2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{(2)} = \frac{4 \pm صفر}{2} = ②$ حل وحيد

لو استخدمت التحليل هتطلع مربع كامل

## * المتباينات

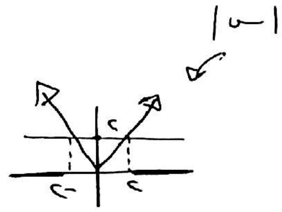
لحل المتباينات نتبع نفس خطوات حل المعادلات ولكن مع اختلاف مهم

* عند ضرب الطرفين أو قسمة الطرفين على عدد سالب يتم تغيير إشارة "اتجاه" علامة التباين

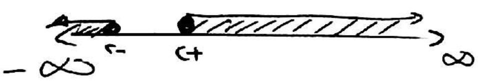
**مثال ①** $4 - س^{2} \geq صفر$

∴ $-س^{2} \geq -4$ ÷ -١

∴ $س^{2} \leq 4$ أخذ الجذر التربيعي




∴ $|س| \leq 2$



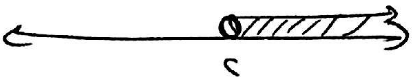

∴ مجموعة الحل هي $[+2 ، \infty[ \cup ]-\infty ، -2]$

**مثال ②** $12 - س^{3} > 4$

$-س^{3} > -8$

$س^{3} < 8$

$\boxed{س < 2}$




مجموعة الحل $]2 ، \infty[$

## تعريف المقياس

إذا | س - م | = ب فإن

م : صفر المقياس .

س - م = { ب    س ≥ م
             -ب    س < م

توضيح
س - م = صفر
∴ س = م

س = { ب + م    س ≥ م
       -ب + م    س < م

---

مثال ①

ص = | س |

ص = { س    س ≥ ٠
        -س    س < ٠

س = صفر

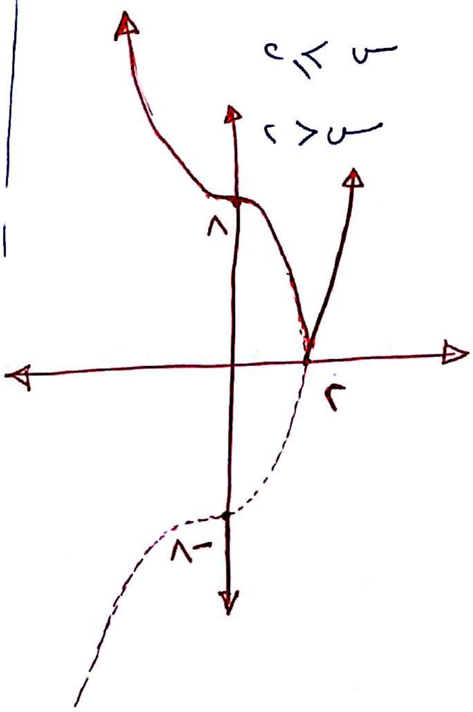
مثال ②

ص = | س^٣ - ٨ |

ص = { س^٣ - ٨    س ≥ ٢
        -(س^٣ - ٨)    س < ٢

س^٣ - ٨ = صفر
∴ س = ٢ ← صفر المقياس

إضافي ← رسم المنحنى



## المصفوفات والمحددات

## ① المصفوفات

تذكر أنه

① المصفوفات هي طريقة لترتيب البيانات

② مصفوفة من النظم م * ن ⟸ م : عدد الصفوف . ن : عدد الأعمدة .

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

مصفوفة من النظم ٢ * ٢

١ ← العنصر ١١ صف عمود

٥ ← العنصر ١٢ صف عمود

-٤ ← العنصر ٢١ صف عمود

٧ ← العنصر ٢٢ صف عمود .

③ المصفوفة الصفرية ~~كل~~ كل عناصرها أصفار .

④ مصفوفة الوحدة ← * مصفوفة مربعة : عدد الصفوف = عدد الأعمدة .

* عناصر القطر الرئيسي = ١ والباقي أصفار

مثال $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة وحدة من النظم ٢ * ٢

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة وحدة من النظم ٣ * ٣

$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة وحدة من النظم ١ * ١

* مصفوفة الوحدة هي المحايد الضربي للمصفوفات

* الجمع والطرح للمصفوفات من نفس النظم فقط.

$$\begin{pmatrix} ٥- & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ \\ ٧ \\ ٦ \end{pmatrix}$$ ⟸ لا يمكن إجراء العملية.

* ضرب المصفوفات ⟸ الشرط

$$\underset{ل * ن}{\begin{bmatrix} م & \\ & ١ \end{bmatrix}} * \underset{س * ص}{\begin{bmatrix} م & \\ & ٢ \end{bmatrix}}$$

$\boxed{ن = س}$ ⟸ عدد صفوف المصفوفة الأولى = عدد أعمدة الثانية.

المصفوفة الناتجة تكون من النظم $\boxed{ل * ص}$

⟵ لإيجاد أي عنصر م*ن ⟸ يتم تجميع حواصل ضرب عناصر الصف م من المصفوفة الأولى في عناصر العمود ن من المصفوفة الثانية.

<u>مثال</u>

$$\underset{٢ * ٣}{\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٣ \\ ١- & ٤- & ١٢ \end{pmatrix}} X \underset{٣ * ١}{\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \\ ٢- \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{٢ * ١}{\begin{bmatrix} (٢- * ٤) + (٢ * ٥) + (٥ * ٧) \\ (٢- * ١) + (٢ * ٤-) + (٥ * ١٢) \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{٢ * ١}{\begin{pmatrix} ١٧ \\ ٥٤ \end{pmatrix}}$$

⟵ لا يمكن تعريف القسمة في المصفوفات.

# المحددات

① المحدد "مربع" ← عدد الصفوف = عدد الأعمدة .

② المحدد له قيمة

* إيجاد قيمة محدد ٢*٢

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{جـ ب}$$

* إيجاد قيمة محدد ٣*٣ ← الطريقة الأولى

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ط} & \text{ح} & \text{ز} \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ} \begin{vmatrix} \text{و} & \text{هـ} \\ \text{ط} & \text{ح} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{و} & \text{د} \\ \text{ط} & \text{ز} \end{vmatrix} + \text{جـ} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ح} & \text{ز} \end{vmatrix}$$

= أ(هـ ط - و ح) - ب(د ط - و ز) + جـ(د ح - ز هـ)

= أ هـ ط + ب و ز + جـ د ح - [أ و ح + ب د ط + جـ ز هـ]

الطريقة الثانية لفك محدد من النظم ٣*٣

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix} \begin{matrix} أ & ب \\ د & هـ \\ ز & ح \end{matrix}$$

$\ominus$ $\oplus$

$$\Delta = \text{أ هـ ط} + \text{ب و ز} + \text{جـ د ح} - [\text{ب د ط} + \text{أ و ح} + \text{جـ هـ ز}]$$

---

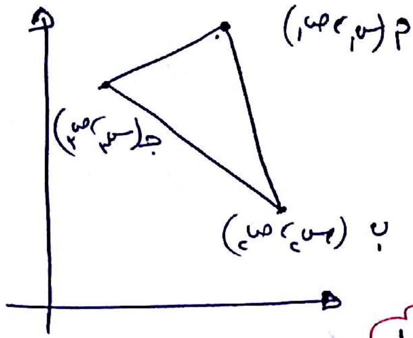
ملاحظة : استخراج عامل مشترك من مصفوفة ومحدد .

| المحدد | المصفوفة |
|---|---|
| $\|م\| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ | $م = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ |
| $\|م\| = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ | $م = ٢ \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ \frac{٥}{٢} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$ |
| من أحد (الصفوف) أو (الأعمدة) فقط | "من كل العناصر" |

لاحظ الفرق

## تذكر

لإيجاد مساحة Δ في المستوى الإحداثي س ص . باستخدام المحددات .




$$م = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & 1 \\ س_2 & ص_2 & 1 \\ س_3 & ص_3 & 1 \end{vmatrix}$$

معيار

$\boxed{المساحة = |م|}$

---

## مثال

أوجد مساحة Δ أ ب جـ الذي رؤوسه

(-١، ٢) ، (٥، -٣) ، (٤، ٥)

$$م = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

$$م = \frac{1}{2}\Big(\big[(-1)(-3)(1) + (2)(1)(4) + (1)(5)(5)\big] - \big[(2)(5)(1) + (-1)(1)(5) + (1)(-3)(4)\big]\Big)$$

$3 \quad 8 \quad 25 \qquad 10 \quad -5 \quad -12$

$$= \frac{1}{2}\,|36 + 7| = \frac{43}{2}$$

$|م| = \frac{43}{2}$ وحدة مربعة

* مراجعة على الأعداد المركبة

* العدد التخيلي (ت) = $\sqrt{-1}$

pure real

لاحظ أنه

١ ، ٥ ، أ ، -٢٣/١٧ أعداد حقيقية صرفة.

ت ، ٥ت ، -٢٣/١٧ ت أعداد تخيلية صرفة

Pure imaginary

٧ - ١٢ت ، ٢,٥ - ٣٧ت

أعداد مركبة

* العدد المركب هو الذي يتكون من شقين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي.

* مرافق العدد المركب ← نقوم بعكس إشارة الجزء التخيلي (فقط)

مثال

| العدد | مرافقه |
|---|---|
| ٥ + ٧ت | ٥ - ٧ت |
| -١٢ + ٣ت | -١٢ - ٣ت |
| ٢٣ | ٢٣ |
| -٥ت | ٥ت |

إضافي: تذكر أنه

م س^٢ + ب س + جـ

لابد تكون المعاملات حقيقية ← لابد أن تكون الجذور مترافقة.

مثال ← ضع العدد ع على الصيغة القياسية.

ع = (٣ - ٤ت) / (٥ + ١٢ت)

نقوم بالضرب في مرافق المقام للبسط والمقام.

الحل: ع = (٣ - ٤ت) / (٥ + ١٢ت) × (٥ - ١٢ت) / (٥ - ١٢ت) = (١٥ - ٣٦ت - ٢٠ت + ٤٨(ت)^٢) / (٢٥ - ١٤٤(ت)^٢)

(-١) (-١)

= $\boxed{\frac{-٣٣}{١٦٩} - \frac{٥٦}{١٦٩}ت}$

Scanned by CamScanner

# Sheet ②

① فى دراسة لكمية الأمطار وتأثيرها على الفيضان كل عام

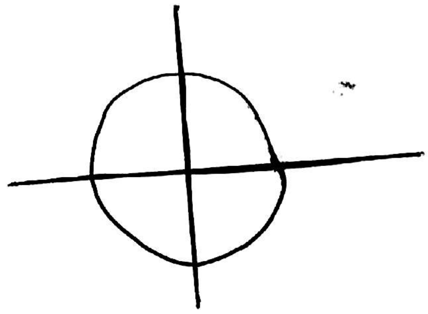
يُراد تمثيل العلاقة بينهم بيانياً

فيكون المتغير المستقل هو ---- ويُمثل على المحور -----.

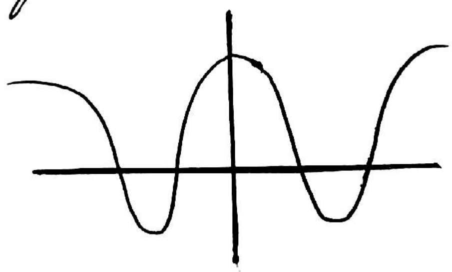
ويكون المتغير التابع هو ---- ويمثل على المحور -----.

② * عرف الدالة :

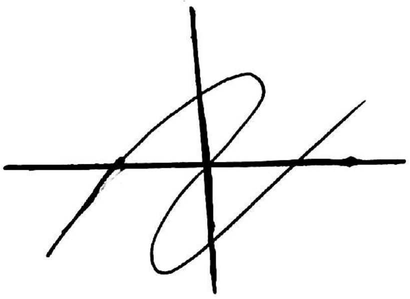
وحدد أى من الأشكال الآتية دوال وأيا منها ليس كذلك .



----

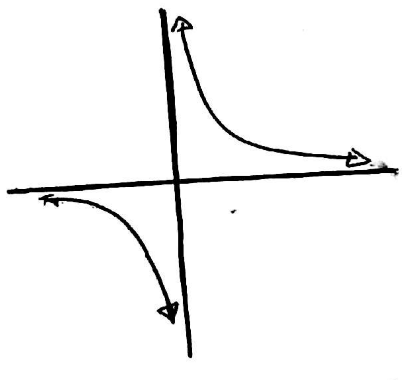


----



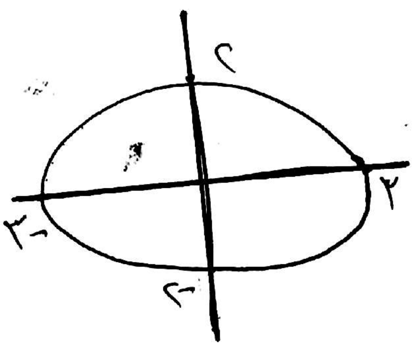
----

③ حدد المجال والمدى للأشكال الآتية :-



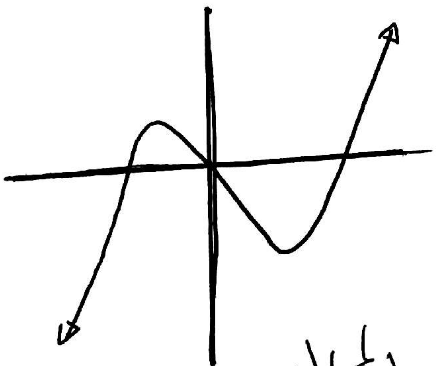
المجال :

المدى :




المجال :

المدى :



المجال :

المدى :

* أعد كتابة المقادير الجبرية الآتية بعد إجراء إكمال مربع لكل منها:

① $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٥س + ٣$

**إرشاد:** المقدار $= س^{٣} + (٣س^{٢} - ٥س + ٣)$

$= س^{٣} + ٣(س^{٢} - \frac{٥}{٣}س) + ٣$

⋮

② $س^{٤} - ٣س^{٢} + ٧$

---

**أوجد مفكوك المقدار**

$(س^{٥} - ١٩)^{٢} =$

$(س^{٢} - ٣س)^{٣} =$

$(أ + ب - جـ)^{٢} =$

م/ محمد إبراهيم

أوجد جذور المعادلة $س^{2} + ٤س + ٤ =$ صفر

① باستخدام التحليل :

② باستخدام القانون العام :

③ ماذا تتوقع أن يكون شكل هذه الدالة بيانياً

بناءً على فهمك لمعنى جذور " أصفار " الدالة بيانياً ؟

---

* أوجد تعريف الدوال

① $ص = |س^{2} - ٤|$

② $ص = |س^{3} - ٦٤|$

* أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$

أوجد ① أ ب

② هل أ ب = ب أ ؟

③ أ$^{٣}$

---

* Δ أ ب جـ رؤوسه أ (١ ، ٢) ، ب (-٢ ، ٣) ، جـ (-٢ ، -٤)

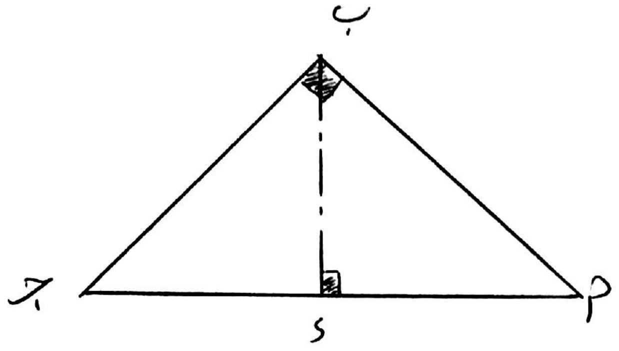
أوجد : ① مساحة Δ أ ب جـ

② م مركز Δ أ ب جـ

③ إذا كان ل منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ك منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـأ}}$

أوجد ل ، ك ، هـ ثم أوجد مساحة Δ ل ك هـ .

# أساسيات الهندسة المستوية



① فيثاغورث

$(أ\,ج)^2 = (أ\,ب)^2 + (ب\,ج)^2$

② اقليدس

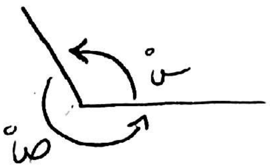
$(ب\,د)^2 = (أ\,د) * (د\,ج)$

$(أ\,ب)^2 = (أ\,د) * (أ\,ج)$

$(ب\,ج)^2 = (ج\,د) * (ج\,أ)$

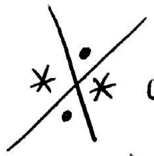
$(ب\,د) * (أ\,ج) = (ب\,أ) * (ب\,ج)$

③ الزوايا



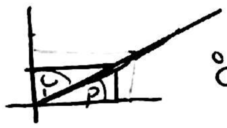
$س + ص = 360°$

- مجموع الزوايا المتجمعة حول نقطة = $360°$



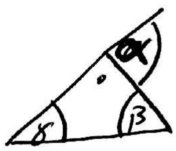
- كل زاويتان متقابلتان متساويتان في القياس

- مجموع الزوايا الداخلة لمثلث = $180°$ ، $س + ص + ع = 180°$



- الزوايا المتتامة مجموعها $90°$ ، $أ + ب = 90°$ ∴ متتامتان .

- الزوايا المتكاملة مجموعها $180°$ ، $\gamma + \beta = 180°$ ∴ متكاملتان .



- الزاوية الخارجة عند د = مجموع الزاويتان الداخلتان عدا المجاورة لها

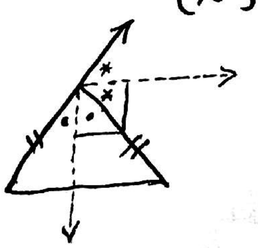
$\gamma + \beta = \alpha$

- مجموع الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه [ن]

$= (ن - 2) * 180°$

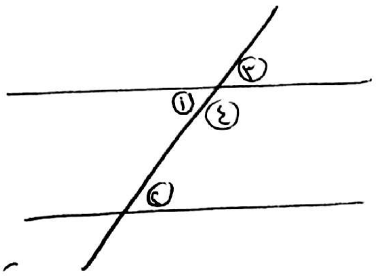
- قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم عدد أضلاعه [ن]

$= \dfrac{(ن - 2) * 180°}{ن}$



- المنصف الداخلي والخارجي لأي زاوية يكونان متعامدان .

## ③ التوازى



• الموازيان لـ ثالث متوازيان.

• يتوازى مستقيمان إذا تواجدت

← زاويتان متبادلتان متساويتان . Z

← زاويتان متناظرتين " " . F

← زاويتان داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع ∟ متكاملتين U

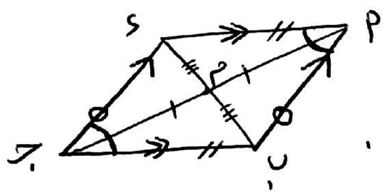
① = ② تبادل

④ = ③ تناظر

② + ④ = ١٨٠° داخلتان.

---

## ④ متوازى الأضلاع




ق(أ) = ق(ج)

ق(أ) + ق(ب) = ١٨٠°

له:

• كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين.

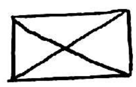
• كل زاويتين متقابلتين متساويتين.

• كل زاويتان متجاورتين متكاملتين.

• القطران ينصف كل منهما الآخر.

### • حالات خاصة

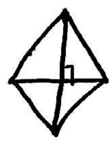
#### المستطيل



• القطران متساويان وغير متعامدان.

• زواياه قائمة

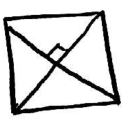
#### المعين



• القطرين متعامدان وغير متساويان

• أضلاعه كلها متساوية

#### المربع



• القطران متساويان ومتعامدان.

• أضلاعه كلها متساوية.

• زواياه قائمة.

---

### • ملاحظات هامة

① لإثبات أن الشكل متوازى أضلاع يكفي إثبات أن هناك ضلعين متقابلين متوازيين و متساويين في الطول.

② لإثبات أى حالة خاصة يجب إثبات أن الشكل متوازى أضلاع أولاً ثم استخدم خاصية من خواص الشكل.

# ⑤ المثلث

* متباينة △

مجموع أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.

---

* فى أى مثلث $\boxed{\text{أ ب ج}}$ إذا كان:

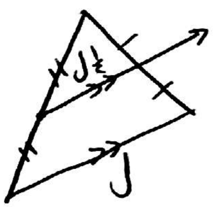
(أ ب)$^2$ + (ب ج)$^2$ > (أ ج)$^2$ ← ∴ حاد الزوايا.

(أ ب)$^2$ + (ب ج)$^2$ = (أ ج)$^2$ ← ∴ قائم الزاوية.

(أ ب)$^2$ + (ب ج)$^2$ < (أ ج)$^2$ ← ∴ منفرج الزاوية.

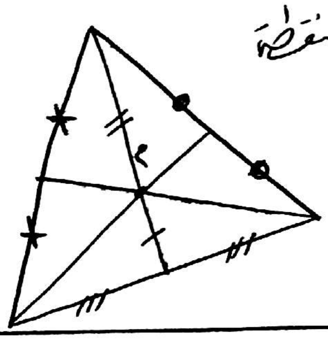
← فى أى △ يكون أكبر ضلع يقابل أكبر زاوية وأصغر ضلع يقابل أصغر زاوية.

---



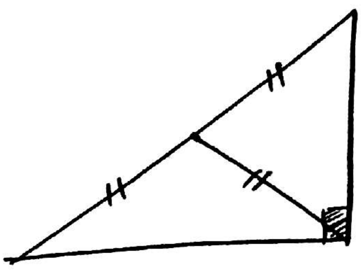
* نظرية: المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين فى △ يوازى الضلع الثالث ويساوى نصفه

---



* متوسطات △ تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة وهذه النقطة تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة (أو ٢ : ١ من جهة الرأس)

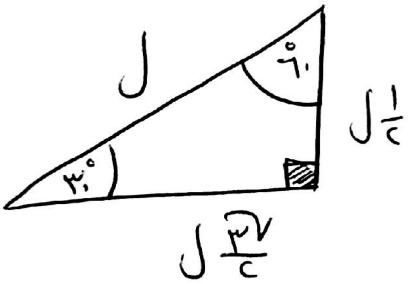
---



* متوسط △ القائم الخارج من رأس القائمة إلى الوتر

← طوله يساوى $\frac{1}{2}$ طول الوتر

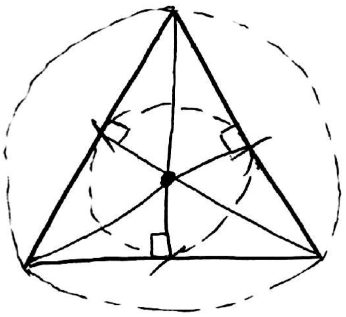
م/ أحمد إبراهيم




* المثلث الثلاثيني ستيني

• طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{1}{2}$ طول الوتر.

• طول الضلع المقابل للزاوية ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول الوتر.



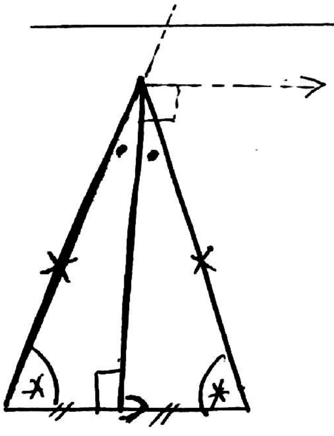
* Δ متساوي الأضلاع

• كل الأضلاع متساوية في الطول.

• كل الزوايا متساوية في القياس = ٦٠°.

• متوسطاته هي منصفات أضلاعه هي ارتفاعاته.

• نقطة تلاقي متوسطاته هي مركز الدائرة الداخلة والخارجة للـ Δ.



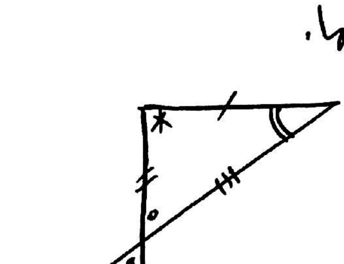
* Δ متساوي الساقين

• المتوسط الخارج من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس و ⊥ القاعدة.

• منصف الزاوية الخارجة للرأس // القاعدة.

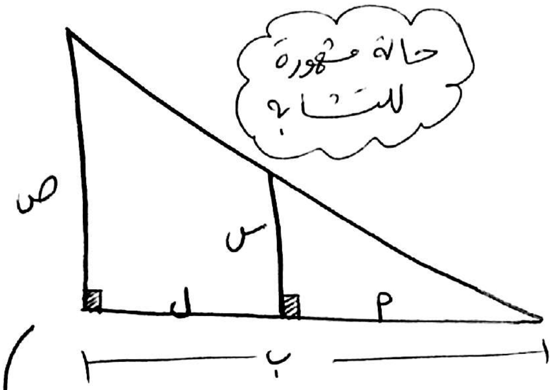
* تطابق ΔΔ

يتطابق ΔΔ إذا
← تساوى طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما
← قياس زاويتين والضلع الواصل بينهما.
← تساوي الـ ③ أضلاع



ملحوظة: مركز الدائرة الداخلة لـ Δ هو نقطة تلاقي منصفات زواياه — متساوي الأضلاع

* تشابه ΔΔ




يتشابه ΔΔ إذا كان:

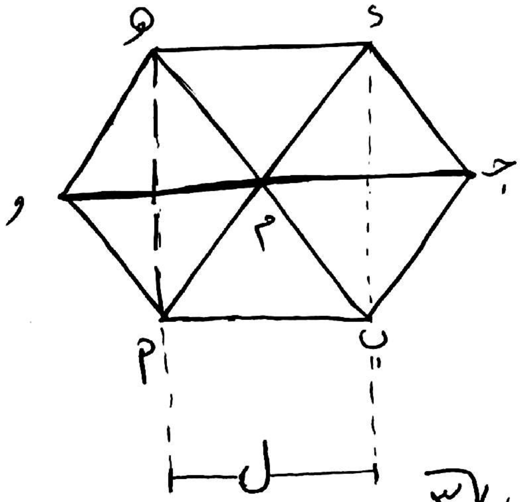
← تناسب ضلعين وتساوي الزاويتين المحصورة.

← تساوي زاويتين وتناسب الضلع الواصل بينهما.

← تساوي الـ ③ زوايا

$$\frac{س}{ص} = \frac{م}{ب} = \frac{م}{م+ل}$$

## ⑥ الشكل السداسي: المنتظم




• قياس احدى زواياه الداخلية (ن=٦)

$$\frac{ن-٢}{ن} \times ١٨٠ = ١٢٠^\circ$$

الخواص اعتبر طول أب = ل

∴ أد = ب هـ = جو = ٢ل ،

∴ أهـ = ب د = جـ أ = د و = ل $\sqrt{٣}$

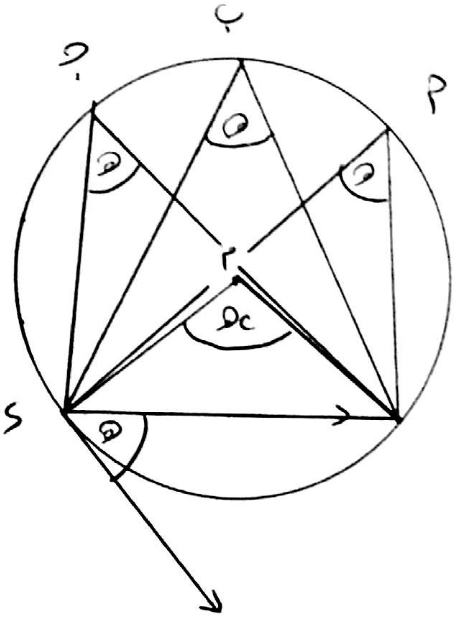
المثلثات م جـ د ، م د هـ ، م هـ و ، م و أ ، م أ ب ، م ب جـ ،

كلها متساوية الأضلاع ومتطابقة.

وطول كل ضلع = ل ،

م/ محمد إبراهيم

# ⑦ الدائرة



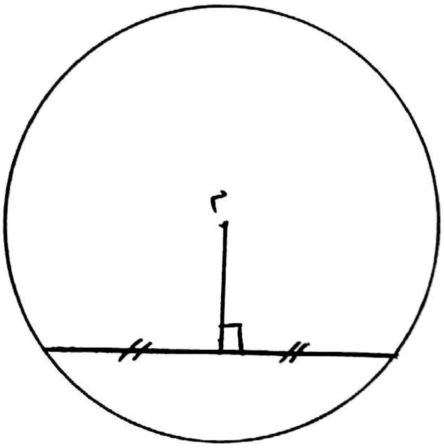

* الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

$\boxed{م = ٢ أ}$

$\boxed{أ = ب = جـ}$

* الزاوية المماسية = المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

$\boxed{ق(\hat{جـ}) = ق(\hat{د})}$ = ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{أ}$)

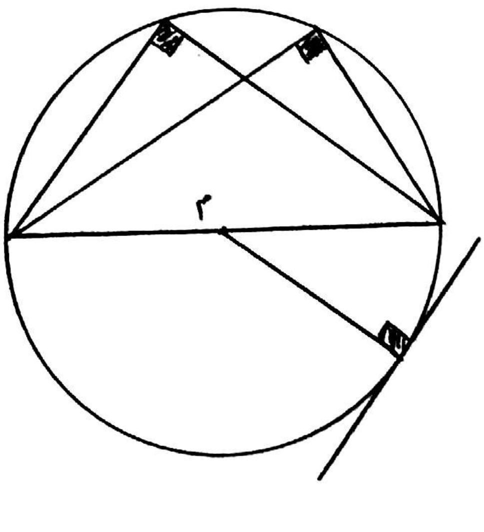



* في الشكل المقابل

مستقيم يمر بالمركز + ⊥ الوتر ← ∴ ينصف الوتر.

مستقيم يمر بالمركز + ينصف الوتر ← ∴ ⊥ الوتر.

مستقيم ينصف الوتر ، ⊥ على الوتر ← ∴ يمر بالمركز

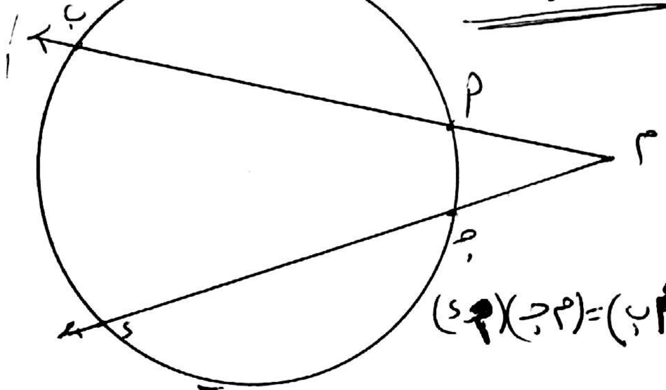



* في الشكل المقابل

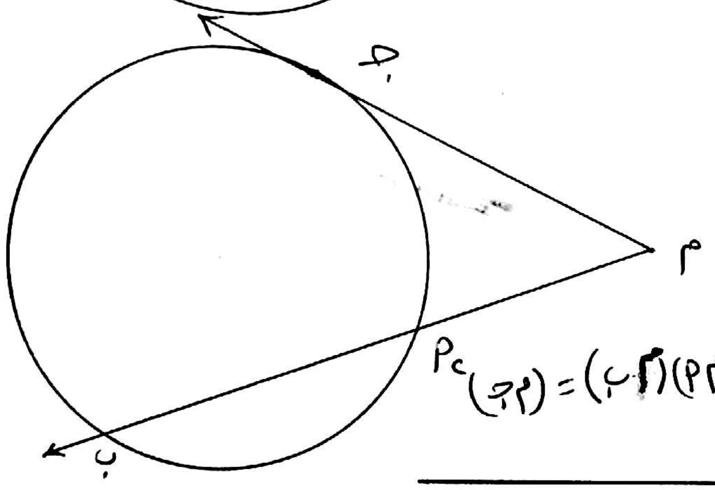
← المثلث المرسوم في نصف دائرة قائم الزاوية.

← المماس لدائرة عند نقطة يكون ⊥ نصف القطر المرسوم عند النقطة.

* في الشكل المقابل

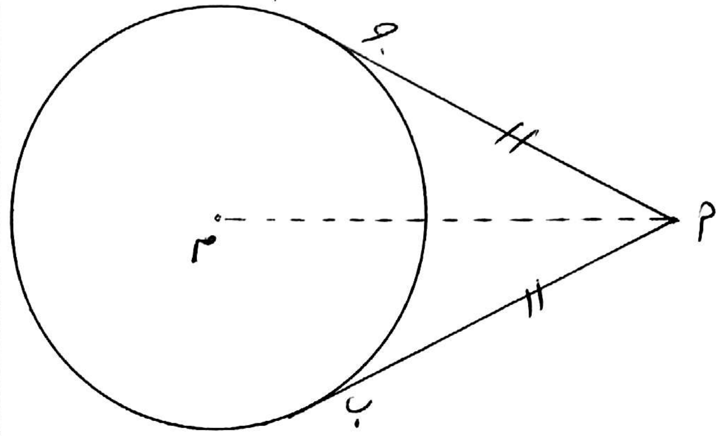


(م أ)(م ب) = (م جـ)(م د)



(م أ)(م ب) = (م جـ)$^2$

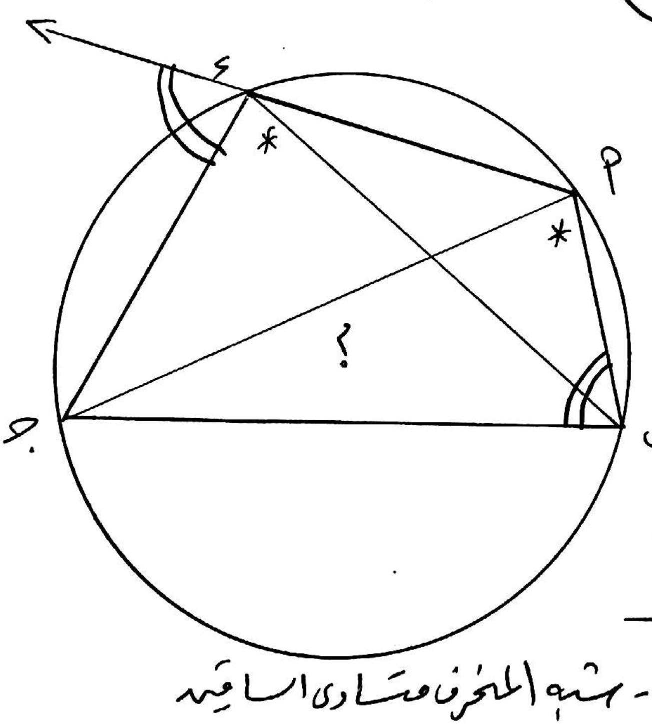
في الشكل المقابل



المماسات المرسومة من نفس النقطة متساويات

مهم جداً

## * الشكل الرباعي الدائري



خواصه: * رؤوسه تقع على محيط دائرة واحدة.

* كل زاويتين متقابلتين متكاملتين.

* الزاوية الخارجة = الداخلة المقابلة المجاورة لها.

* الزاويتان المقامتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها متساويتان.

لاحظ أن: * المربع - المستطيل - شبه المنحرف متساوي الساقين هي أشكال رباعية دائرية.

بينما: متوازي الأضلاع في الحالة العامة والمعين ليسوا أشكال رباعية دائرية.

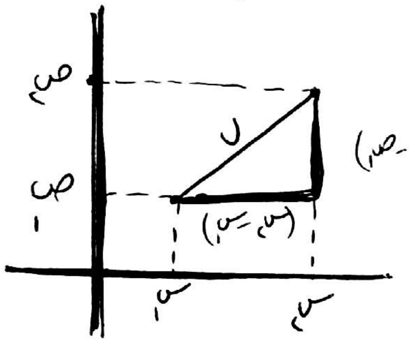
# أساسيات الهندسة التحليلية

## ١) البعد بين نقطتين

لأي نقطتين في المستوى $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$

يمكن إيجاد البعد بينهما "طول القطعة المستقيمة ل الواصلة بينهما"

من العلاقة




$$ل = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

---

## ٢) لإيجاد إحداثي منتصف قطعة مستقيمة

طرفيها $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$

$$م \text{ (نقطة المنتصف)} = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

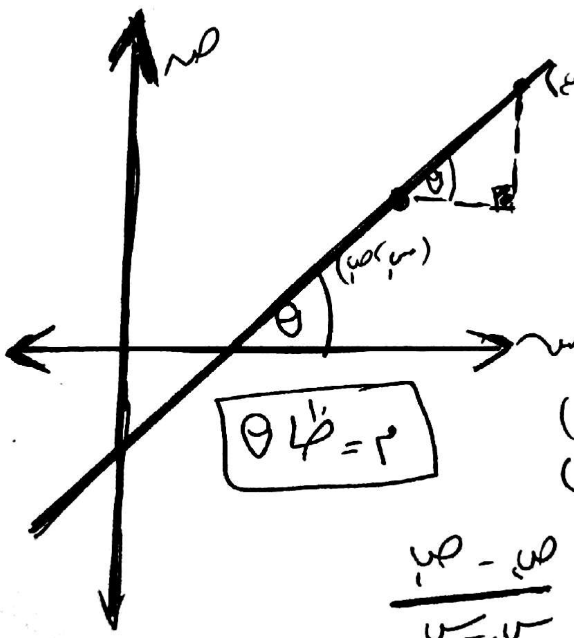
---

## ٣) لإيجاد إحداثي نقطة تلاقي متوسطات △ $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ ، $(س_٣ ، ص_٣)$

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$$

---

## ٤) تعريف ميل الخط المستقيم




يتم تعريف ميل الخط المستقيم بأنه

ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم

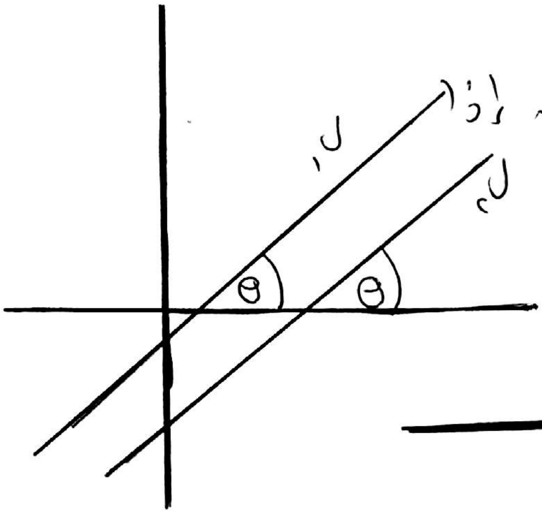
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

← إذا كانت الزاوية حادة فإن الميل (+)

← 〃 〃 〃 منفرجة 〃 〃 (−)

، بمعلومية نقطتين عليه $م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

## ⑤ تعريف التوازى لمستقيمين :




← يقال لمستقيمين ل١ ، ل٢ أنهما متوازيان إذا كان لهما نفس الميل.

$م_١ = م_٢$

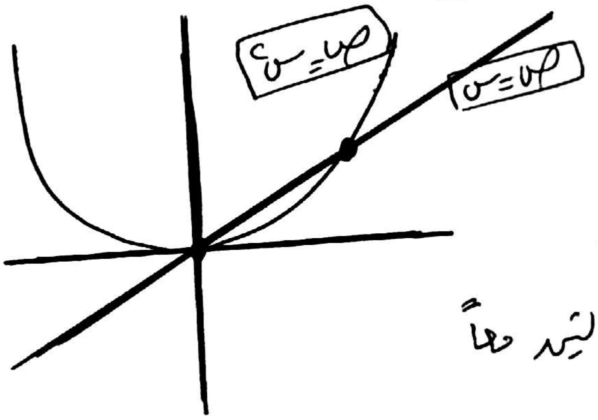
## ⑥ تعريف التعامد لمستقيمين :

← يُقال لمستقيمين ل١ ، ل٢ أنهما متعامدان إذا كان

$\boxed{م_١ م_٢ = -١}$

*مثال: أوجد ميل العمودى على المستقيم الذى ميله ٢ ← اقلبه وغير اشارته ∴ $\boxed{\frac{-١}{٢}}$

## ⑦ تعريف التقاطع لمنحنيين




إذا اشترك منحنيين فى نقطة يقال لهما أنهما متقاطعان عند هذه النقطة

مهم ← لإيجاد نقاط التقاطع نقوم بحل المعادلتين معاً

مثال أوجد نقاط تقاطع المنحنيين

ص = س ← (I)

ص = س² ← (II)

بالتعويض من (I) فى (II)

∴ س = س²

∴ س² − س = صفر

∴ س (س − ١) = صفر

إما $\boxed{س = صفر}$ أ، $\boxed{س = ١}$

بالتعويض فى معادلة أى منحنى

∴ $\boxed{ص = صفر}$ أ، $\boxed{ص = ١}$

∴ النقطتين هما (صفر، صفر) ، (١، ١) #

> لاحظ أنه لا يجوز القسمة على س

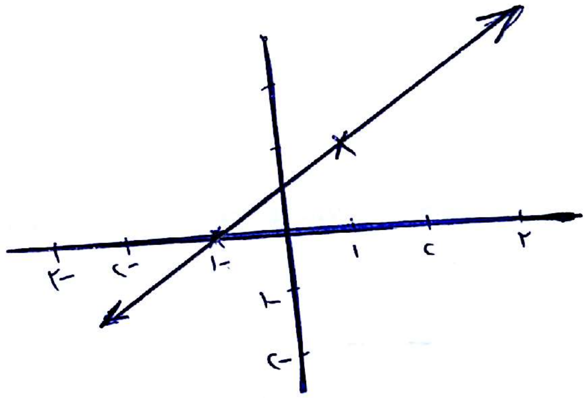
م/ محمد ابراهيم

# ٨) الخط المستقيم

* **الرسم**: يمكن رسم المستقيم بمعلومية ① نقطتين عليه
② نقطة وميل
③ ميل وجزء مقطوع من محور الصادات .

**مثال**: ارسم المستقيم المار بالنقطتين (١،١) ، (-١، ٠) واحسب ميله

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{(0)-(1)}{(-1)-(1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$



* الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

$$\boxed{ص = م\,س + جـ}$$

م: الميل

جـ: طول الجزء المقطوع من محور الصادات

**مثال** أوجد ميل المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كان $2ص = -3س + 4$

← لاحظ أنه يجب وضعه على الصورة العامة ((معامل ص = ١))

∴ $ص = \left(\frac{-3}{2}\right)س + (2)$

∴ الميل = $\left(\frac{-3}{2}\right)$

$جـ = (2)$

مثال ② أوجد م ، ج

$$4\,\text{ص} - 3\,\text{س} + 5 = \text{صفر} \qquad (\div 4)$$

$$\text{ص} + \left(-\frac{3}{4}\right)\text{س} + \left(\frac{5}{4}\right) = \text{صفر}$$

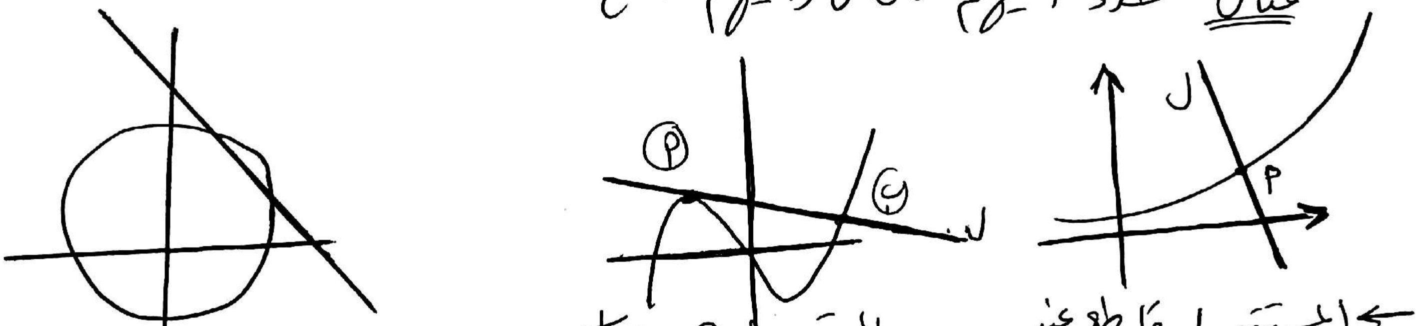
$$\text{ص} = \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{م}}\text{س} + \underbrace{\left(\frac{-5}{4}\right)}_{\text{ج}}$$

م/ محمد ابراهيم

## ⑨ المستقيم المماس لدالة

**تعريف** المماس لدالة هو الذي يقطعها في نقطة وميله عند هذه النقطة = ميل الدالة.

**مثال** حدد أيهم مماس وأيهم قاطع




← المستقيم ل قاطع عند نقطة م

← المستقيم ل هو مماس عند نقطة ① وقاطع عند نقطة ②

قاطع

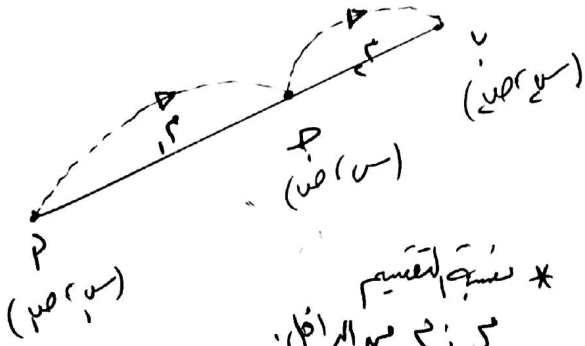
← لاحظ أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع ويمكن إيجادها بطريقتين

أحدهم من تعريف التقاطع ← "بحل المعادلتين معاً"

والآخر باستخدام التفاضل.

# * تقسيم قطعة مستقيمة :

## ① التقسيم من الداخل :

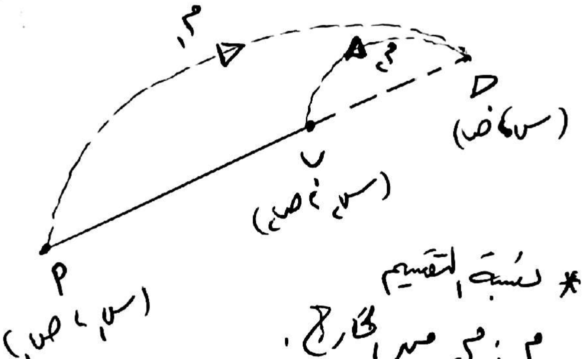



$$س = \frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2}$$

$$ص = \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2}$$

* نسبة التقسيم
م١ : م٢ من الداخل .

## ② التقسيم من الخارج :



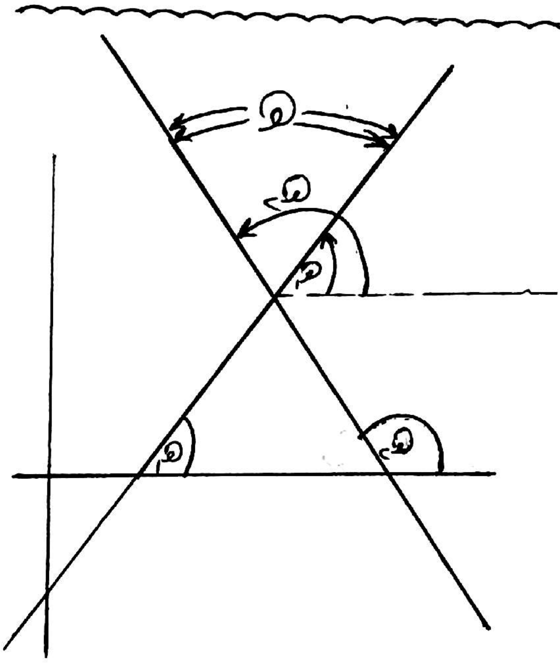

$$س = \frac{م_1 س_2 - م_2 س_1}{م_1 - م_2}$$

$$ص = \frac{م_1 ص_2 - م_2 ص_1}{م_1 - م_2}$$

* نسبة التقسيم
م١ : م٢ من الخارج .

---

# * الزاوية بين مستقيمين :




$هـ = هـ_2 - هـ_1$

بأخذ "ظا" للطرفين .

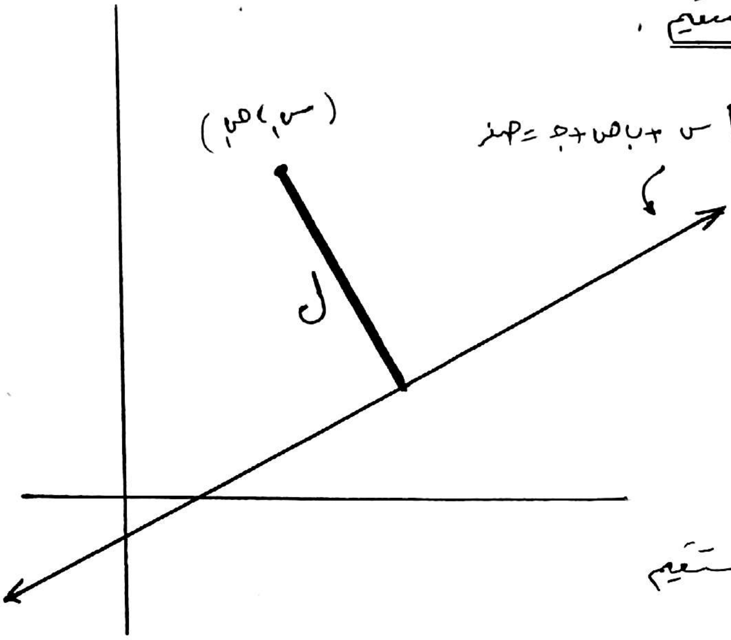
$\therefore$ ظا هـ = ظا (هـ٢ − هـ١)

$$ظا\ هـ = \frac{ظا\ هـ_2 - ظا\ هـ_1}{1 + ظا\ هـ_2\ ظا\ هـ_1}$$

$$\boxed{ظا\ هـ = \pm \frac{م_2 - م_1}{1 + م_1 م_2}}$$

توجد قيمتين للزاوية هـ
وهما متكاملتان .

* طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم .




$$ل = \frac{|أ\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

مثال ① أوجد البعد بين جـ (٢، ١) والمستقيم ص = ٢س − ١ .

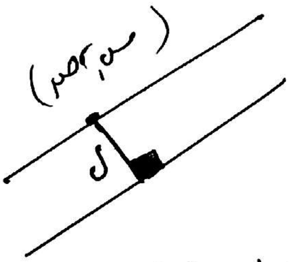
س١ = ٢ ، ص١ = ١ ، الصورة العامة للمستقيم : −٢س + ص + ١ = صفر .

$$\therefore ل = \frac{|(-٢)(٢) + (١)(١) + ١|}{\sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$$ وحدة طول .

مثال ② أوجد البعد بين المستقيمين ٢ص = ٣س + ١ ، ص − $\frac{٣}{٢}$س = ٥

المستقيم الأول : $-\frac{٣}{٢}$ س + ص − $\frac{١}{٢}$ = صفر .

" الثاني : $-\frac{٣}{٢}$ س + ص − ٥ = صفر .




* ميل الأول = ميل الثاني ⇐ ∴ متوازيان والبعد بينهما ثابتا .

* نختار أي نقطة على أحدهما ونوجد بعدها عن الآخر .

بوضع س = صفر في الأول ⇐ ص = $\frac{١}{٢}$ ⇐ (٠ ، $\frac{١}{٢}$) = (س١، ص١)

$$\therefore ل = \frac{|(-\frac{٣}{٢})(٠) + (١)(\frac{١}{٢}) - ٥|}{\sqrt{(-\frac{٣}{٢})^٢ + (١)^٢}} = \frac{٩\sqrt{١٣}}{١٣}$$ وحدة طول .

م/ محمد إبراهيم

# sheet ④

① أوجد نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين (٢ ، ٣) ، (٨ ، ٧) ولتكن م١ .

* وأوجد نقطة تلاقي متوسطات △ أ ب جـ حيث
أ = (١ ، ٢)
ب = (٣ ، ٥)
جـ = (٢ ، ٢)
ولتكن م٢ .

* ومن ثم أوجد طول القطعة المستقيمة م١م٢

* أوجد معادلة المستقيم ⟷م١م٢

* أوجد معادلة العمودي عليه من نقطة منتصفه .

٢) أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية مقدارها $٤٥°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٣) إذا كان ميل المستقيم ل هو $-٢$
وكان المستقيم يمر بالنقطتين $(٢ ، ١)$ ، $(س_١ ، ٥)$
أوجد الإحداثي $س_١$

٤) أوجد نقاط تقاطع المنحنيين (أ) $ص = \sqrt{س}$ ، $ص = س^٢$

(ب) $ص = س$ ، $ص = س^٣$

⑤ الخلية الكهروضوئية تحكمها العلاقة

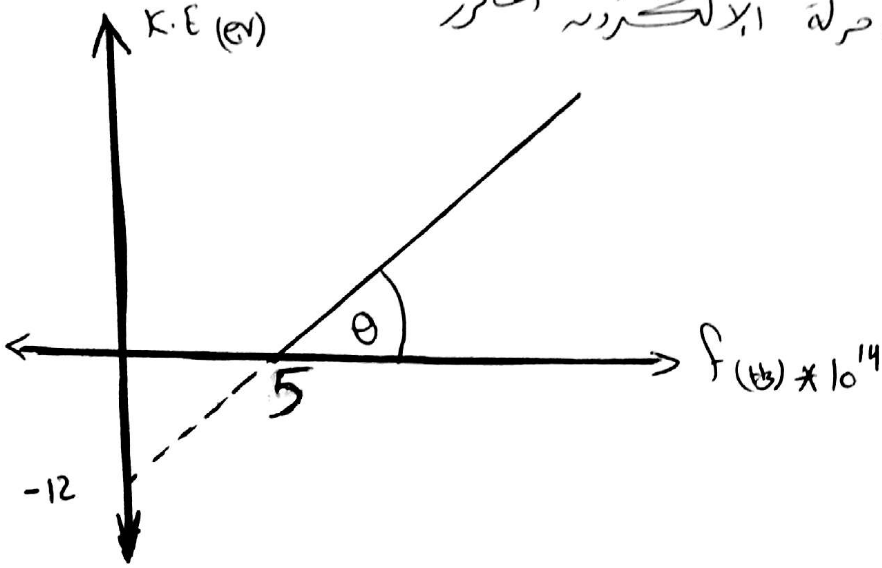
$$K.E = h.f - \phi$$

حيث $\phi$ : هي دالة الشغل.

$f$ : تردد الالكترون المتحرر.

$h$ : ثابت بلانك

$K.E$ : طاقة حركة الالكترون المتحرر




من الشكل المقابل

∴ دالة الشغل =

$= \tan\theta$

التردد الحرج "أقل تردد كافٍ لخروج الالكترون" =

* عند طاقة حركة = صفر للالكترون.

م/ أحمد ابراهيم

* أوجد احداثيات النقطة ج(س ، ص) التي تقسم القطعة المستقيمة الواصلة بين أ (١ ، ٥) ، ب (٧ ، ٩) بنسبة ١ : ٢ من الداخل.

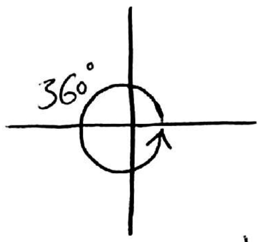
← أعد حل المسألة في حالة أن التقسيم من الخارج.

# أساسيات حساب المثلثات

## ① الزاوية الموجهة

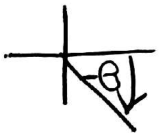
الدائرة الكاملة عبارة عن ٣٦٠° "بالقياس الستيني"

أو "٢ط" بالقياس الدائري




* يتم اعتبار الزاوية موجبة إذا كانت مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة


* ويتم اعتبارها سالبة إذا كانت مقاسة مع اتجاه عقارب الساعة




---

## ② القياس الستيني والدائري

| الزاوية بالقياس الستيني | | الزاوية بالقياس الدائري. |
|---|---|---|
| ٣٦٠° | ← | ٢ط |
| س | ← | ؟؟ |

م/محمد إبراهيم

∘∘ للتحويل من ستيني إلى دائري :

$$\frac{ط}{١٨٠} \times \theta = \frac{٢ط}{٣٦٠} \times \theta$$

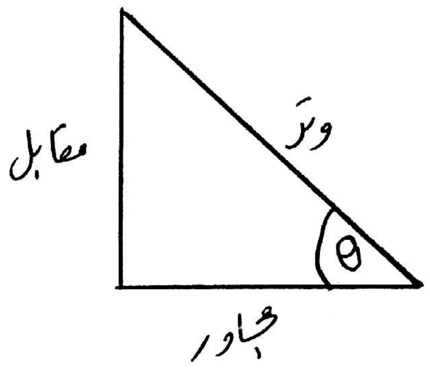
∘∘ للتحويل من دائري إلى ستيني :

$$\frac{١٨٠^\circ}{ط} \times \theta = \frac{٣٦٠^\circ}{٢ط} \times \theta$$

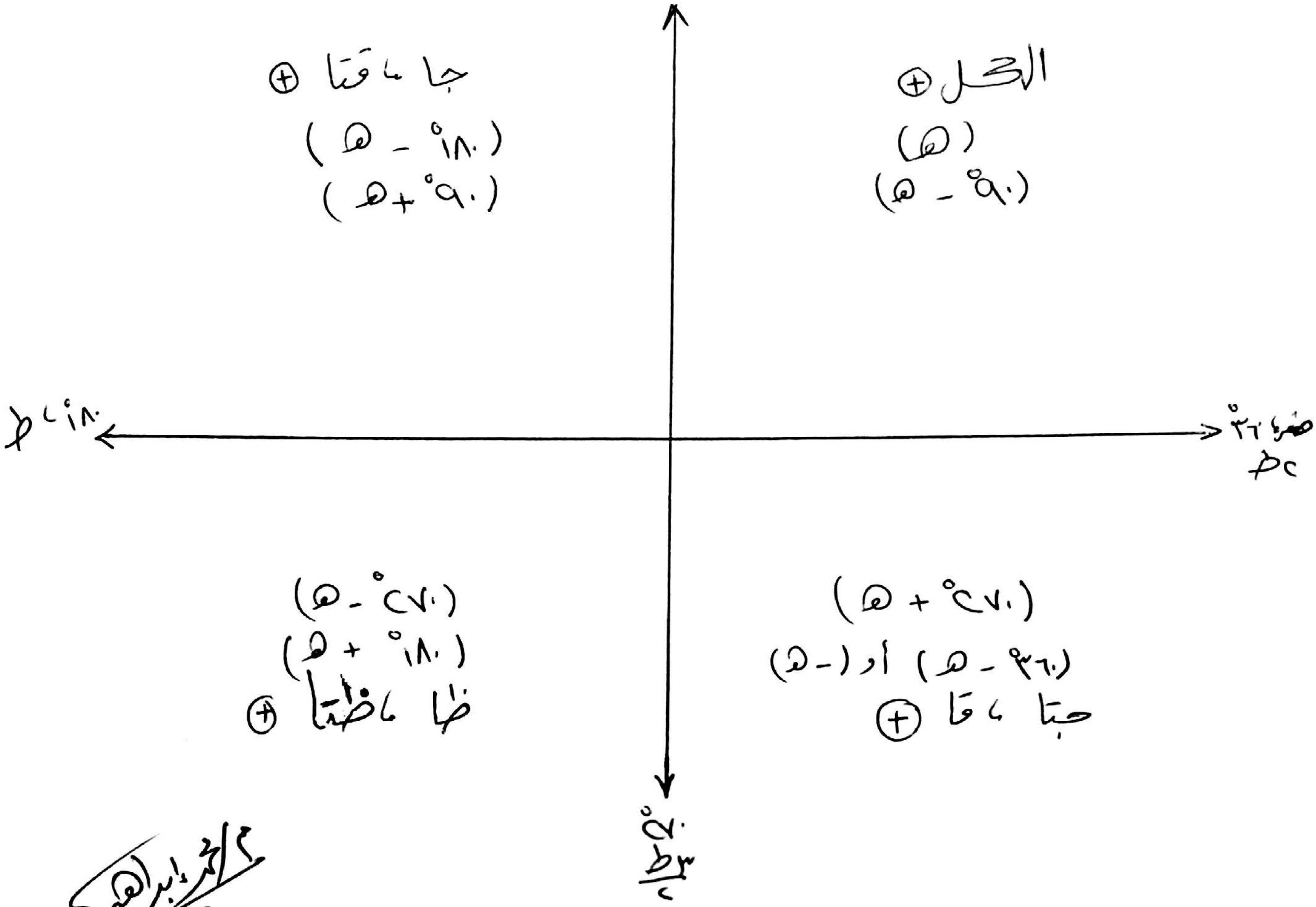
---

## ③ الدوال المثلثية

| | |
|---|---|
| جاθ = مقابل / وتر | قتاθ = 1 / جاθ = وتر / مقابل |
| جتاθ = مجاور / وتر | قاθ = 1 / جتاθ = وتر / مجاور |
| ظاθ = جاθ / جتاθ = مقابل / مجاور | ظتاθ = 1 / ظاθ = جتاθ / جاθ = مجاور / مقابل |



٤) العلاقات بين الدوال المثلثية :




م/ محمد إبراهيم

## خطوات إجراء التحويلات

١) حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية .

٢) حدد إشارة الدالة المثلثية بناءاً على الربع الذي تقع فيه .

٣) إذا كان [هـ] أو [١٨٠° - هـ] أو [١٨٠° + هـ] أو [٣٦٠° - هـ] أو [-هـ]
تظل الدالة كما هي .

٤) إذا كان [٩٠° - هـ] أو [٩٠° + هـ] أو [٢٧٠° - هـ] أو [٢٧٠° + هـ]
يتم تغيير الدالة المثلثية بإضافة "تـ" أو حذف "تـ"

# أمثلة على التحويلات

① جا (١٨٠° - هـ) =

① ⟵ [١٨٠° - هـ] ∴ الربع الثاني .

② ∵ ربع ثاني ، ∴ "جا" تكون موجبة في الربع الثاني .

③ ∵ [١٨٠° - هـ] ∴ تظل الـ "جا" كما هي .

$\boxed{\text{∴ جا (١٨٠° - هـ) = جا هـ}}$

② جتا (٢٧٠° - ٣ هـ) = - جا ٣ هـ

* إشارة سالبة لأن جتا سالبة في الربع الثالث .
* تم إزالة حرف "ت"

③ ظتا (٣٦٠° - هـ) = - ظتا هـ ،

④ قتا (٢٧٠° - هـ) = - قا هـ

⑤ جا (١٨٠° + هـ) = - جا هـ

⑥ جتا (١٨٠° + هـ) = - جتا (هـ)

⑦ جا (٦٠° + هـ) = جا (٦٠° + ٣٠° - ٣٠° + هـ) = جا [٩٠° + (هـ - ٣٠°)]
= جتا (هـ - ٣٠°)

---

## حفظ بسرعة كل

* جا (-هـ) = - جا هـ (دالة فردية)
* ظا (-هـ) = - ظا هـ (دالة فردية)
* جتا (-هـ) = جتا هـ (دالة زوجية)

⇐ نفس القواعد يتم تطبيقها على مقلوباتهم .

## ⑤ المتطابقات

ما الفرق بين

① المتطابقة

② المعادلة

؟

← اعتبر $\theta$ أي زاوية ما وكذلك م ، ب

① $\boxed{جا^2\theta + جتا^2\theta = 1}$

÷ جا^2 ② $\boxed{1 + ظتا^2\theta = قتا^2\theta}$

÷ جتا^2 ③ $\boxed{ظا^2\theta + 1 = قا^2\theta}$

④ $جا(م \pm ب) = جا م جتا ب \pm جتا م جا ب$

⑤ $جتا(م \pm ب) = جتا م جتا ب \mp جا م جا ب$

⑥ $ظا(م \pm ب) = \frac{ظا م \pm ظا ب}{1 \mp ظا م ظا ب}$

⑦ $جا 2\theta = 2 جا\theta جتا\theta$

⑧ $جتا 2\theta = جتا^2\theta - جا^2\theta$

$= 2جتا^2\theta - 1$

$= 1 - 2جا^2\theta$

⑨ $ظا 2\theta = \frac{2 ظا\theta}{1 - ظا^2\theta}$

**ملاحظات**

* $جا 4\phi = 2جا 2\phi جتا 2\phi$

* $جتا 4\psi = جتا^2 2\psi - جا^2 2\psi$

* $ظا 6\alpha = \frac{2ظا(3\alpha)}{1 - ظا^2(3\alpha)}$

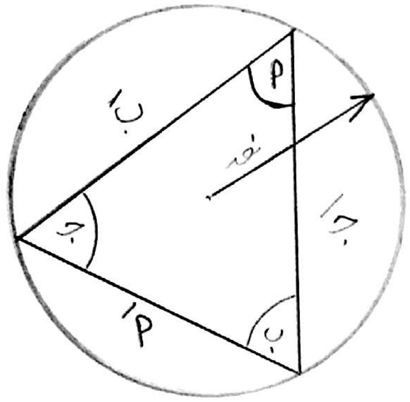
مهم من ⑧

$جا^2\theta = \frac{1}{2}(1 - جتا 2\theta)$

$جتا^2\theta = \frac{1}{2}(1 + جتا 2\theta)$

م/ محمد ابراهيم

## ⑥ قانون الجيب




$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}} = \text{٢ نق}$$

حيث أ ← زاوية

أَ ← الضلع المقابل لها.

نق ← نصف قطر الدائرة الخارجة عنه.

---

## ⑦ قانون جيب التمام

$$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{٢ بَ جَ جتا أ}$$

$$\text{بَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{أَ جَ جتا ب}$$

$$\text{جَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{٢ أَ بَ جتا ج}$$

*

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{أَ}^2}{\text{٢ بَ جَ}}$$

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{بَ}^2}{\text{٢ أَ جَ}}$$

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{\text{٢ أَ بَ}}$$

**

ملاحظة:

① إذا كان س ، ص متكاملتان فإن

جا س = جا ص

، جتا س = - جتا ص

أي أن س + ص = ط

② إذا كان س ، ص متتامتان فإن

جا س = جتا ص

قا س = قتا ص

ظا س = ظتا ص

أي أن س + ص = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

م/ محمد إبراهيم

⑧ إضافي

* $جا ٣\theta = ٣ جا\theta - ٤ جا^{٣}\theta$

* $جتا ٣\theta = ٤ جتا^{٣}\theta - ٣ جتا\theta$

٠ إيجاد جا ، جتا $٣\theta$ بدلالة جا$\theta$ ، جتا$\theta$ ← يمكن إثباتها باستخدام دي موافر أ، قوانين ضعف الزاوية

---

* ع أي Δ إذا كان:

$ع = \frac{أ + ب + جـ}{٢}$ "نصف المحيط"

← يمكن إيجاد مساحة Δ مباشرة عن طريق :

$م = \sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-جـ)}$

---

* ← من قانون مجموع زاويتين يمكن استنتاج الصيغ الآتية

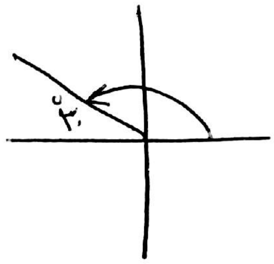
• $جاس جتاص = \frac{1}{٢}\left[جا(س+ص) + جا(س-ص)\right]$

• $جاس جاص = \frac{1}{٢}\left[جتا(س-ص) - جتا(س+ص)\right]$

• $جتاس جتاص = \frac{1}{٢}\left[جتا(س+ص) + جتا(س-ص)\right]$

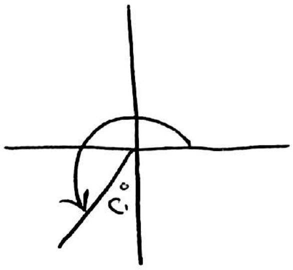
# Sheet ③

① أوجد قياس الزوايا الموضحة مرة باعتبار الدوران مع عقارب الساعة وأخرى ضد عقارب الساعة.



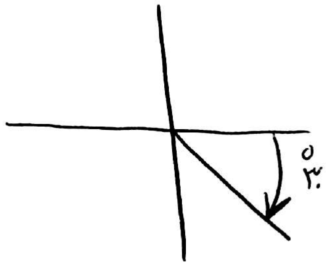

(+) ------

(-) ------




(+) ------

(-) ------




(+) ------

(-) ------

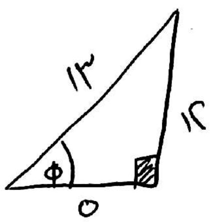
② حول الزوايا الآتية من ستيني إلى دائري أو العكس.

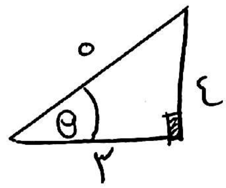
٣٦٠° = ------ ، ٣٥° = ------ ، ٢٩° = ------

٨٣° = ------ ، ٦٠° = ------ ، ٣٠° = ------

$\frac{٥ط}{٤}$ = ------ ، $\frac{١٢ط}{٧}$ = ------ ، $\frac{١١ط}{١٢}$ = ------

③ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية الموضحة



٤ أوجد في صورة أبسط

جتا (٢٧٠° − هـ) = ---- ، ظا (٢٧٠° + هـ) = ----

قتا (٣٦٠° − هـ) = ---- ، قا (٩٠° − هـ) = ----

جا (١٨٠° + هـ) = ---- ، ظتا (٩٠° + ٣هـ) = ----

---

٥ * عبّر عن المقادير الآتية بدلالة جا θ ، جتا θ ، ظا θ فقط

جا ٤θ =

جتا ٦θ =

ظا ٢θ =

"في صورة بسيطة"

جتا ٤θ =

---

٦ أوجد مفكوك الآتي . (في أبسط صورة)

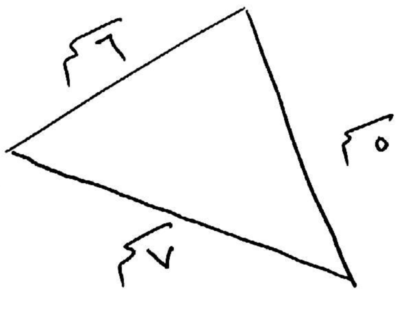
جا (٢أ + ب) =

جتا (ص + ٢س) =

ظا ($\frac{٢}{٣}$ أ) =

---

٧ * أوجد مساحة Δ



# رسم الدوال الأساسية

## ملاحظات:

١) إذا كان د(-س) = د(س) ⟸ ∴ د دالة زوجية
∴ متماثلة حول محور الصادات.

٢) إذا كان د(-س) = - د(س) ⟸ ∴ دالة فردية
∴ متماثلة حول نقطة الأصل.

* إذا كانت د(-س) ≠ د(س) ≠ -د(س) ⟸ ∴ ليست زوجية ولا فردية.

٣) لعمل انعكاس في محور "س" ⟸ (ص ← -ص)

٤) لعمل انعكاس في محور "ص" ⟸ (س ← -س)

٥) الدالة هي علاقة بين متغيرين بحيث كل قيمة للمتغير المستقل (س) تقابلها قيمة واحدة وواحدة فقط للمتغير التابع (ص).

← لتحديد العلاقة ما إذا كانت دالة أم لا نستخدم اختبار الخط الرأسي.

٦) لنقل نقطة رأس المنحنى (أو نقطة تقاطع محاور التماثل) إلى النقطة $(س_1 ، ص_1)$ ⟸ نستبدل في الدالة الأصلية كل

س ب $(س - س_1)$

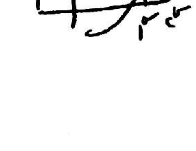
، ص ب $(ص - ص_1)$

م/ أحمد إبراهيم

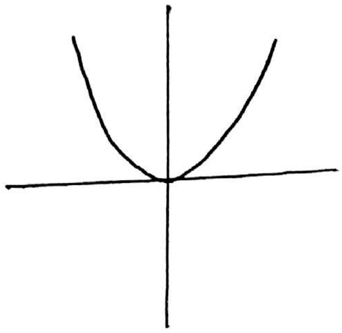
٧) المجال: هي القيم المتاحة للمتغير المستقل "س"

٨) المدى: هي القيم المتاحة للمتغير التابع ص

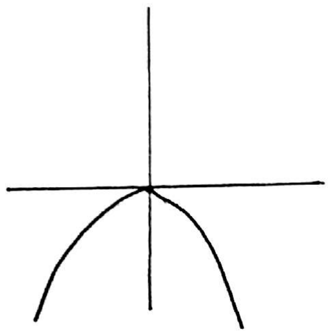
٩) لأي دالة تمر بنقطتين متتاليتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ حيث $س_2 > س_1$
وكان $ص_2 > ص_1$ فإن الدالة تزايدية والعكس صحيح.



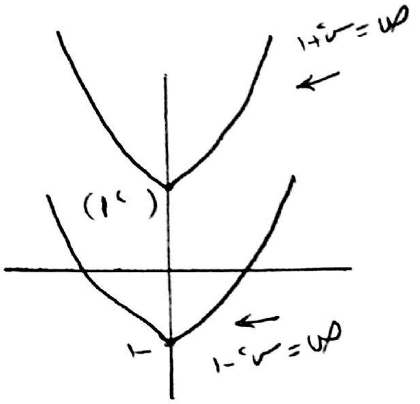
## أولاً: الدالة التربيعية : ص = س²

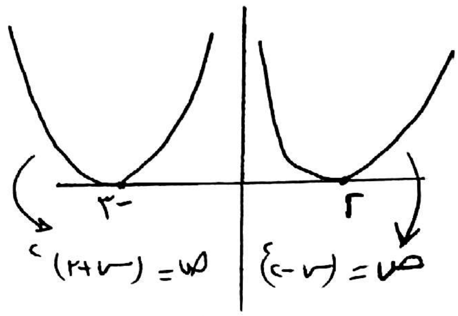


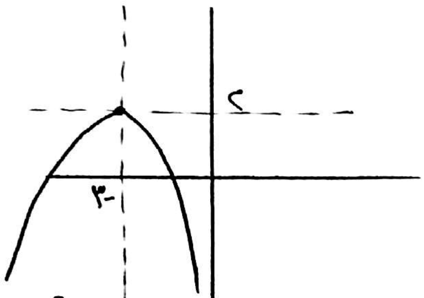
ص = س²



ص = -س²

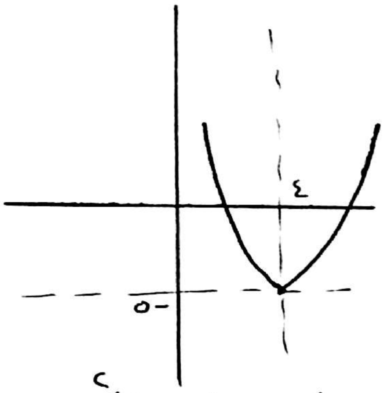



ص - ٢ = -(س - (-٣))²

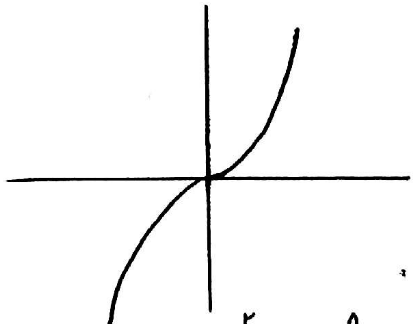
∴ ص - ٢ = -(س+٣)²



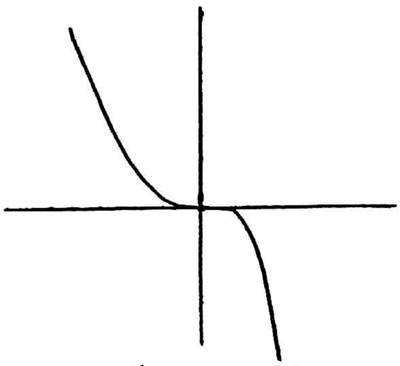

ص = (س - ٤)² - ٥

---

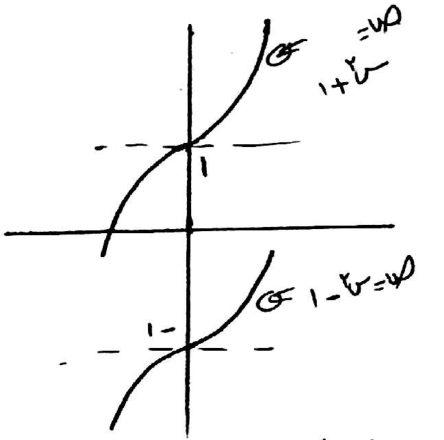
## ثانياً: الدالة التكعيبية : ص = س³

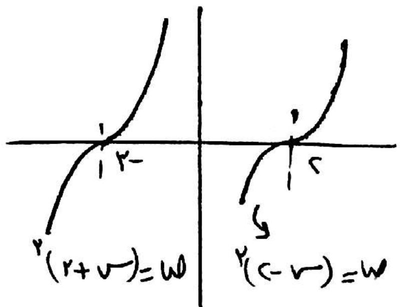


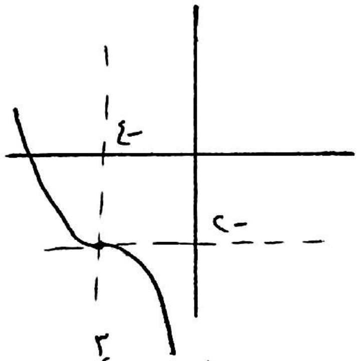
ص = س³



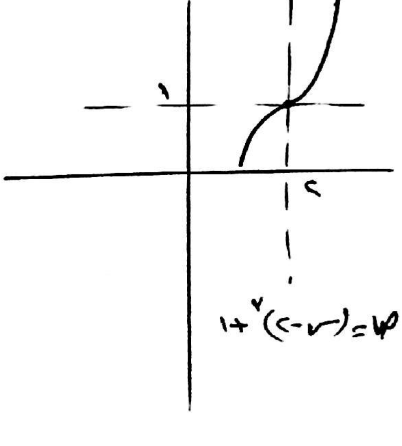
ص = -س³



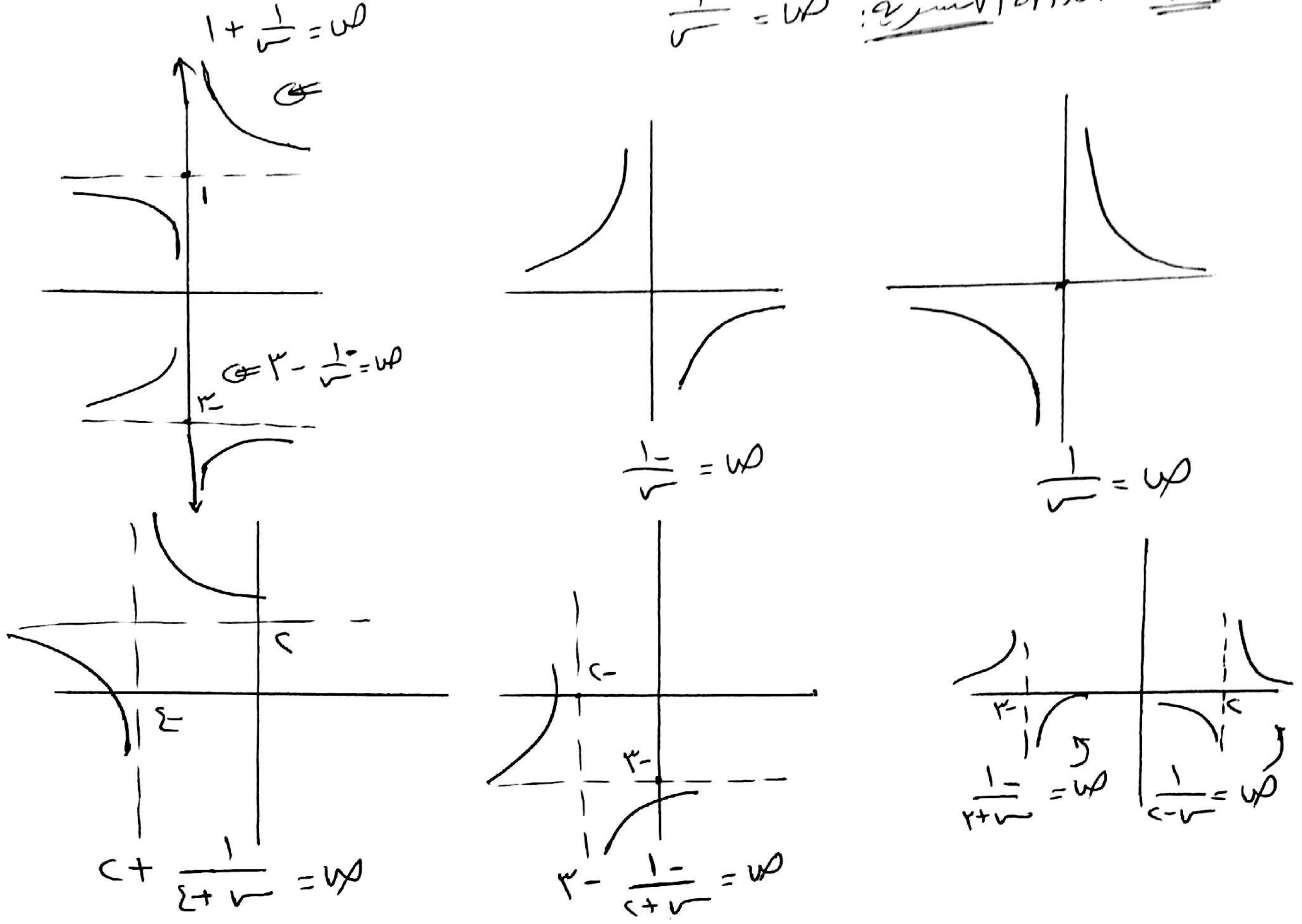




ص = -(س+٤)³ - ٢



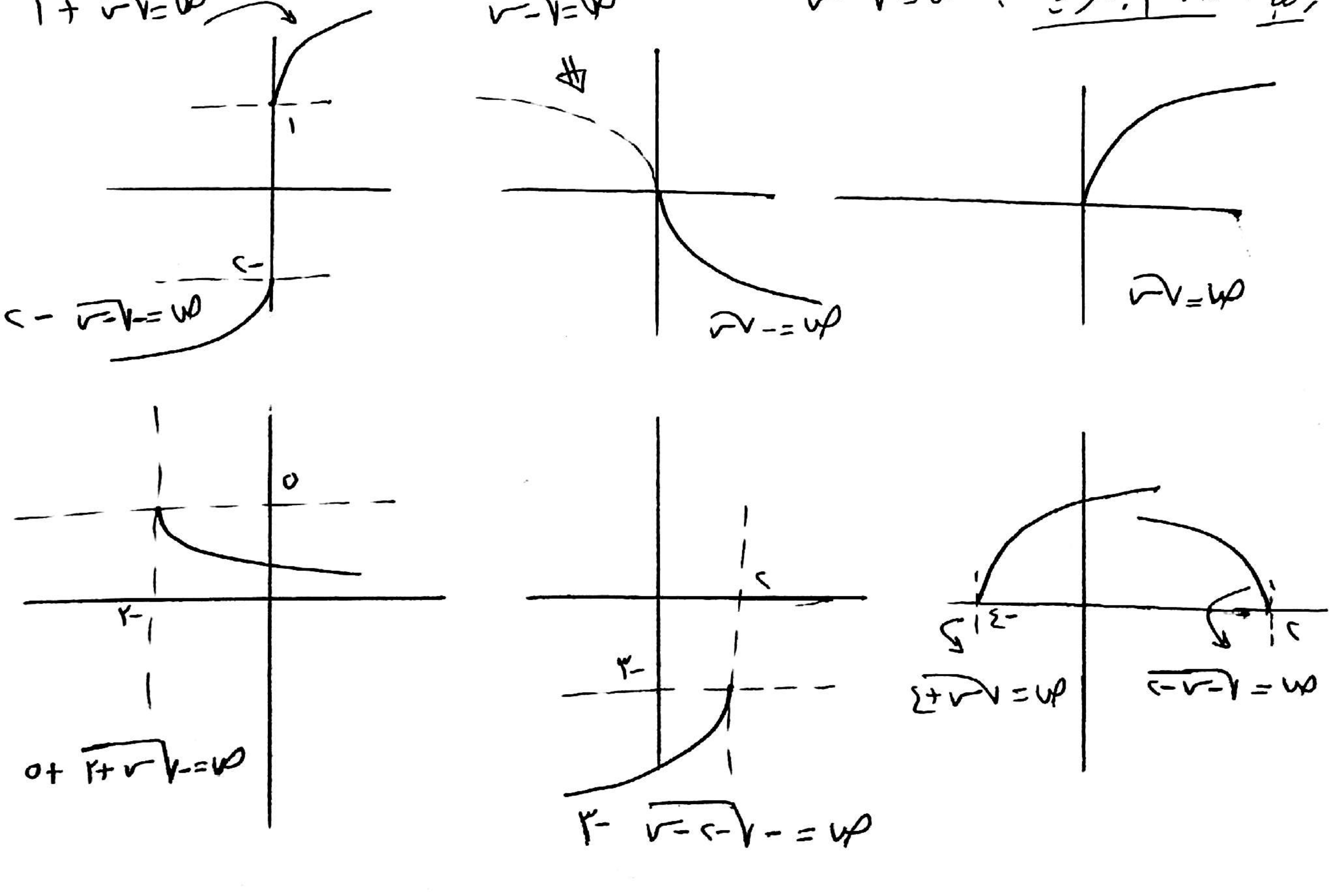

ص = (س-٢)³ + ١

## ثالثاً الدالة الكسرية: ص = ١/س




---

## رابعاً الدالة الجذرية: ص = √س

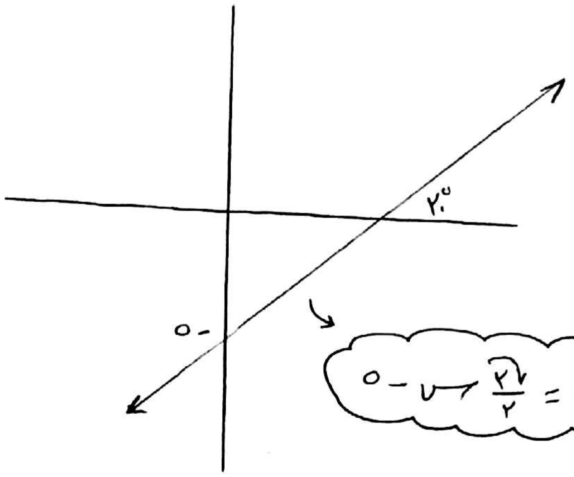


## خامساً الدالة الخطية:

$ص = م\,س + جـ$

م ← الميل

جـ ← طول الجزء المقطوع من محور الصادات

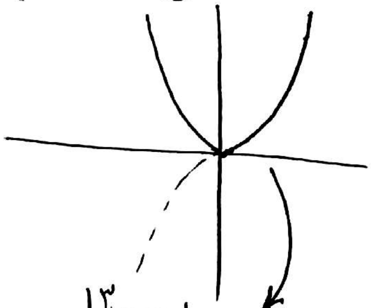



$$ص = \frac{\sqrt{3}}{3}\,س - 5$$

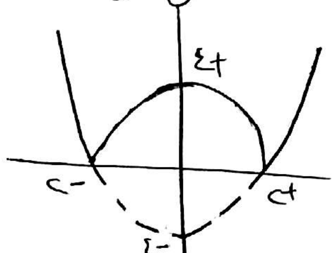
م = ظاهـ ← زاوية ميل المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

---

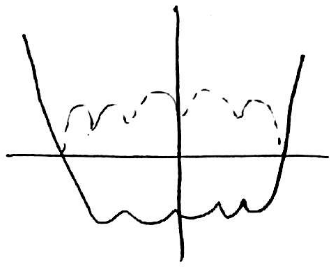
## سادساً دالة المقياس (انعكاس لأي جزء من الدالة تحت محور السينات).

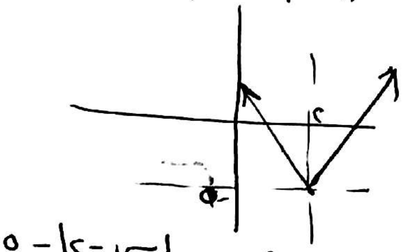


$ص = |س^3|$

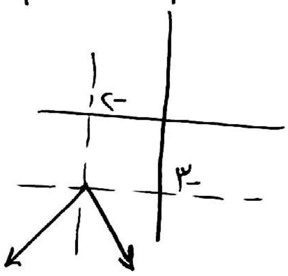



$ص = |س^2 - 4|$

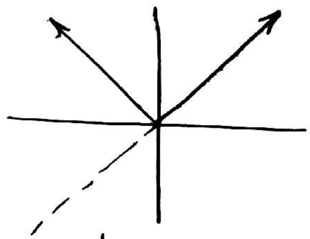





$ص = |س - 2| - 5$



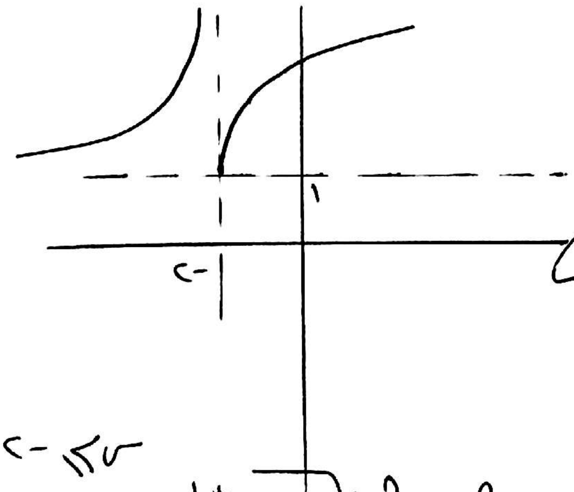

$ص = -|س + 2| - 3$



$ص = |س|$

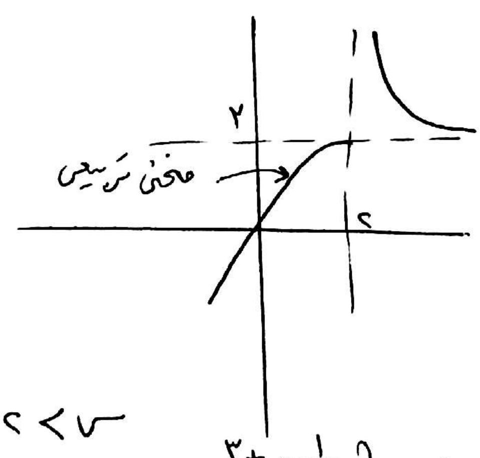
---

## سابعاً: الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة:



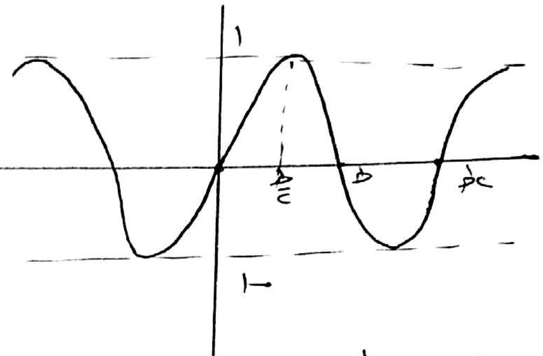

م/ محمد ابراهيم

$$ص = \begin{cases} \sqrt{س + 2} + 1 & س \geq -2 \\ \frac{-1}{س + 2} + 1 & س < -2 \end{cases}$$

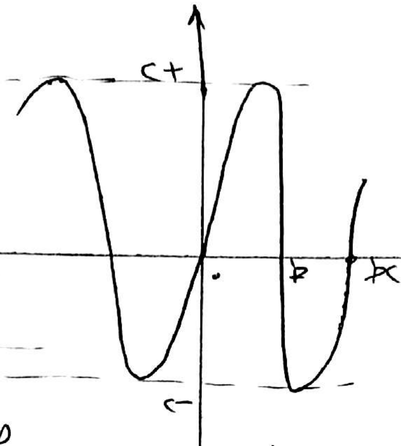



$$ص = \begin{cases} \frac{1}{س - 2} + 3 & س > 2 \\ -(س - 2)^2 + 3 & س \leq 2 \end{cases}$$

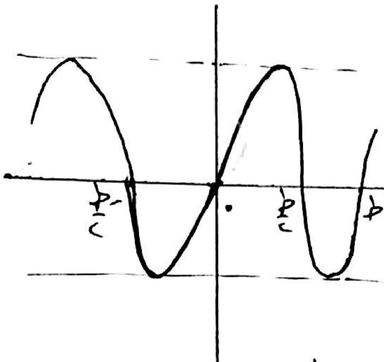
## ثامناً : دالة الجيب :



ص = جا س



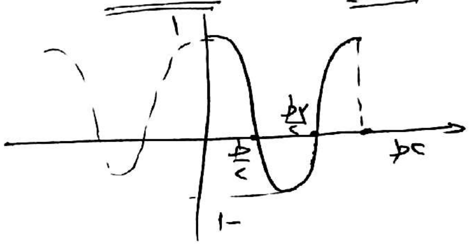
ص = ٢ جا س



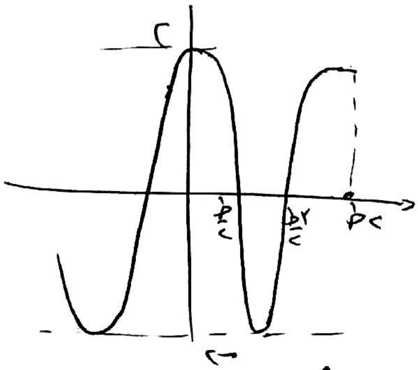
ص = جا ٢ س

---

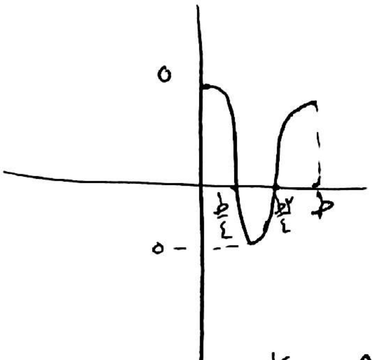
## تاسعاً : دالة الجيب التمام :



ص = جتا س



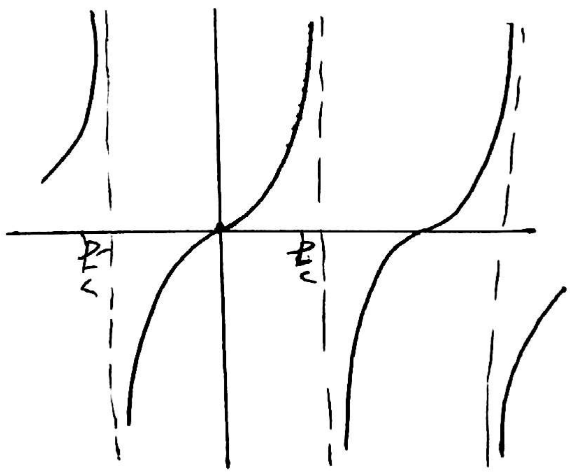
ص = ٢ جتا س



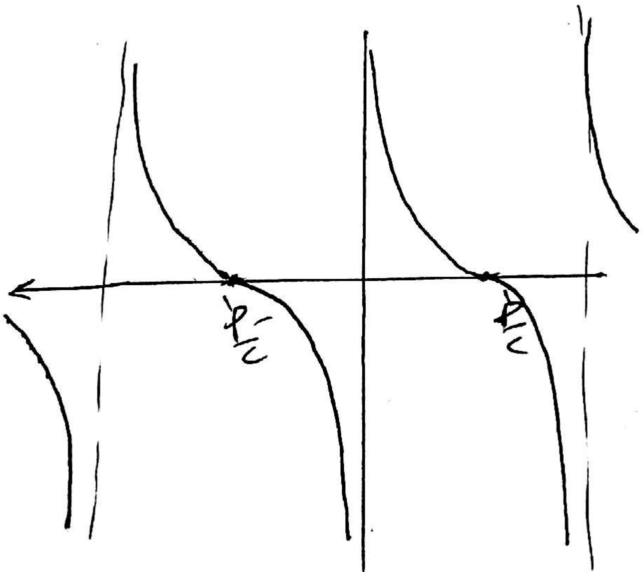
ص = ٥ جتا ٢ س

---

## عاشراً : دالة الظل وظل التمام ،



ص = ظا س

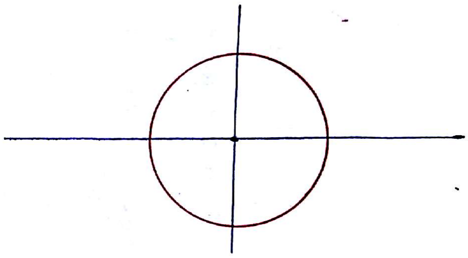


ص = ظتا س

## معادلة الدائرة.

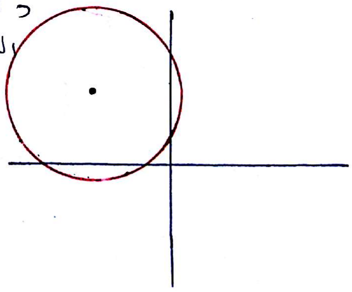
$\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2}$

دائرة مركزها نقطة الأصل.



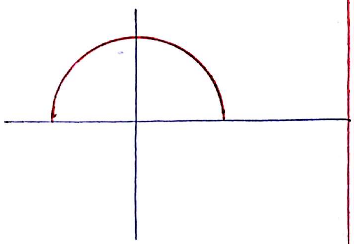
$(\text{س} - \text{س}_1)^2 + (\text{ص} - \text{ص}_1)^2 = \text{نق}^2$

دائرة مركزها النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$

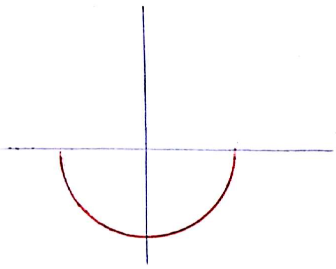


## معادلة نصف دائرة

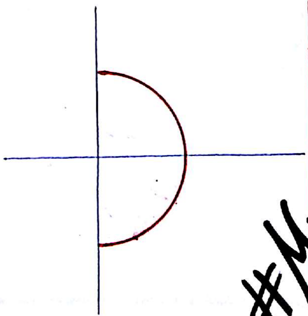
$\text{ص} = +\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$



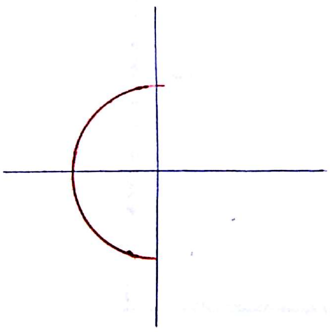
$\text{ص} = -\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$



$\text{س} = +\sqrt{\text{نق}^2 - \text{ص}^2}$



$\text{س} = -\sqrt{\text{نق}^2 - \text{ص}^2}$



# Back to Basics

## Domain & Range - المجال والمدى

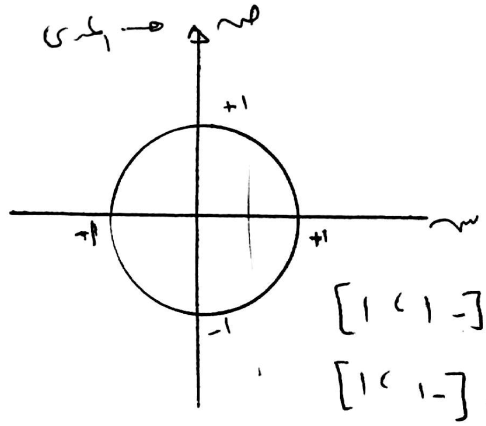
← المجال والمدى لبعض الدوال والمنحنيات المشهورة .

**الأساس:**

← المجال : هو القيم المتاحة للمتغير المستقل (س)

← المدى : هو القيم المتاحة للمتغير التابع (ص)

**مثال ①**

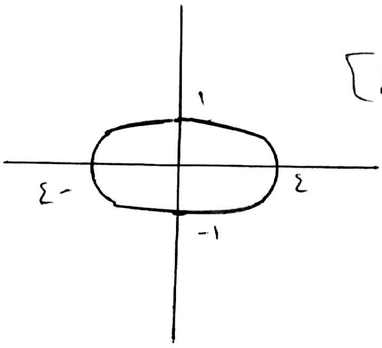



المجال = [-١ ، ١]

المدى = [-١ ، ١]

**مثال ②**

المجال [-٤ ، ٤]




المدى [-١ ، ١]

## مجال الدوال الحقيقية

① كثيرات الحدود ← ح

② $\sqrt{د(س)}$ ← د(س) ≤ صفر

③ $\frac{1}{د(س)}$ ← د(س) ≠ صفر

④ $\frac{1}{\sqrt{د(س)}}$ ← د(س) > صفر

⑤ لو $\frac{د(س)}{ر(س)}$ ⟸ شرط $\left.\begin{array}{l} د(س) > صفر \\ ر(س) > صفر \end{array}\right\}$ ⟸ المجال = ح⁺

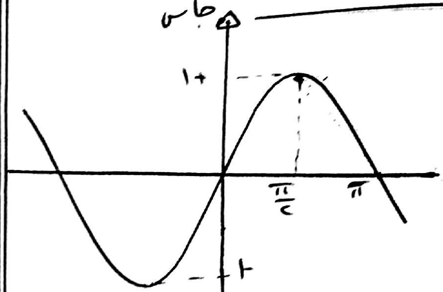
⑥ $أ^{س}$ ⟸ * المجال = ح
* شرط : أ > صفر

⑦ (أ)جا(ب)س ، (أ)جتا(ب)س ⟸ المجال ح ، المدى [-أ ، أ]

⑧ ظا س ⟸ المجال ح - $\{\frac{ن\pi}{2}\}$ ، ن ≠ صفر ، ن ∈ ص*

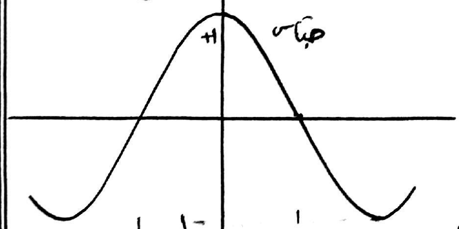
⑨ الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة ← حسب :
أ - فترات التعريف.
ب - الدالة في كل قاعدة .

* أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية



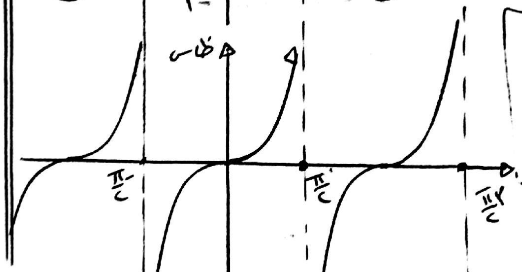

* المجال: ح

* المدى: [-1، 1]




المجال: ح

المدى: [-1، 1]

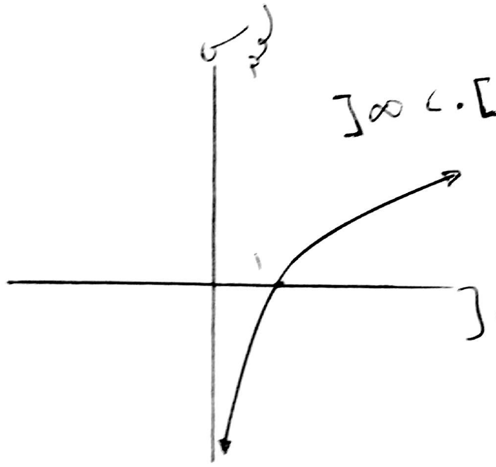



المجال: ح - $\left\{ن \frac{\pi}{2}\right\}$

حيث ن عدد صحيح

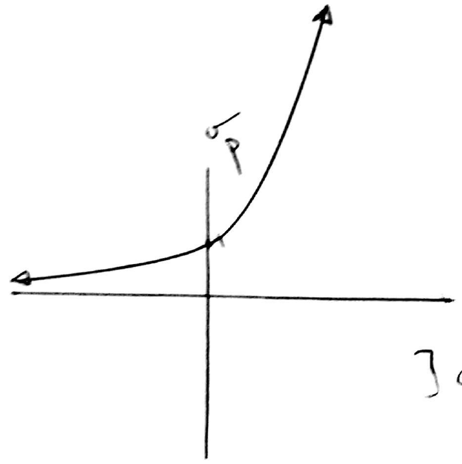
ن فردي

المدى: ح




المجال: ح$^+$ ]0، ∞[

المدى: ح ]-∞، ∞[



المجال: ح

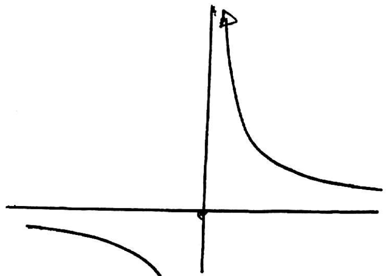
المدى: ح$^+$ ]0، ∞[

Scanned by CamScanner

$\frac{1}{س}$

المجال $ح - \{٠\} = ح^*$

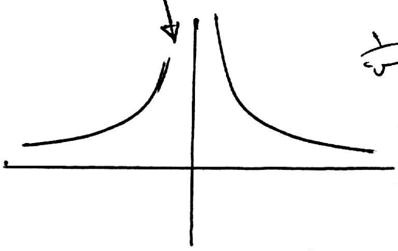
المدى $ح^*$



$\frac{1}{س^٢}$

المجال $ح^*$

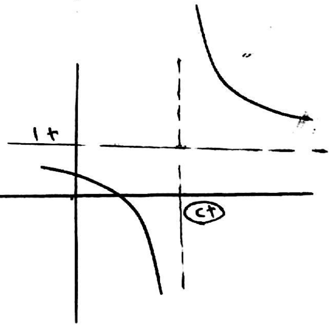
المدى $]٠، \infty[ = ح^*_+$



$\frac{1}{س-٢} + ١$

المجال $ح - \{٢\}$

والمدى $ح - \{١\}$



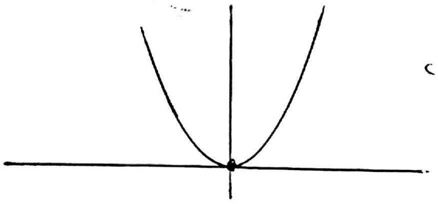


$س^٢$

المجال $ح$

المدى $[٠، \infty[$

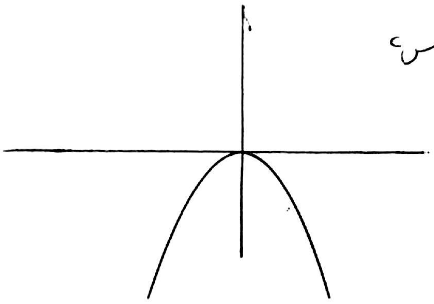
$ح - ح^-$ ، $\{٠\} \cup ح^*_+$



$-س^٢$

المجال $ح$

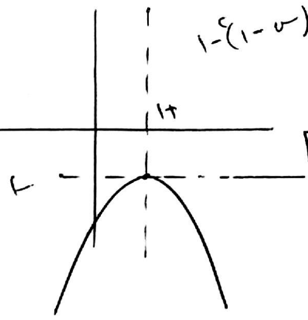
المدى $]-\infty، ٠]$



$-(س-١)^٢-١$

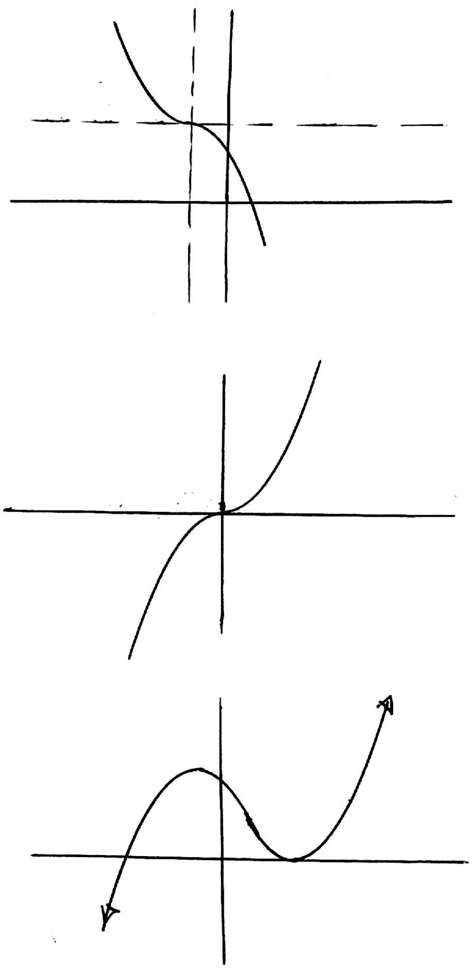
المجال $ح$

المدى $]-\infty، -١]$



## الدوال التكعيبية

المجال والمدى لها ح



| الشكل العام | | المجال |
| --- | --- | --- |
| كثيرات الحدود | ⟸ | ح |
| $\sqrt{د(س)}$ | ⟸ | د(س) ≥ صفر |
| $\frac{1}{د(س)}$ | ⟸ | د(س) ≠ صفر |
| $\frac{1}{\sqrt{د(س)}}$ | ⟸ | د(س) > صفر |
| $أ^{س}$ | ⟸ | المجال = ح ، أ > صفر |
| لو$_{أ}$ (س) | ⟸ | المجال $ح^{+}$ ، أ > صفر |
| جاس ، جتاس | ⟸ | المجال = ح |

ويتم عادة إيجاد المجال بعد رسم المنحنى

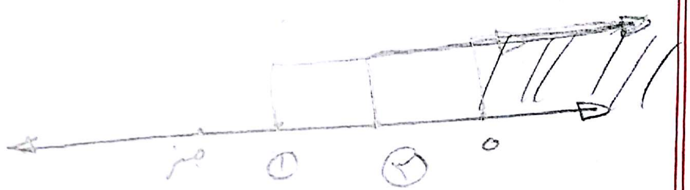
**مثال** أوجد مجال الدالة

ص = لو$_{(س-١)}$(س - ٣) + ظا س + $\frac{١}{\sqrt{س - ٥}}$

① { س - ٣ > ٠ ، س - ١ > ٠

② ح - {ن $\frac{\pi}{٢}$} ن فردي صحيح .

③ س - ٥ > صفر




س > ٥

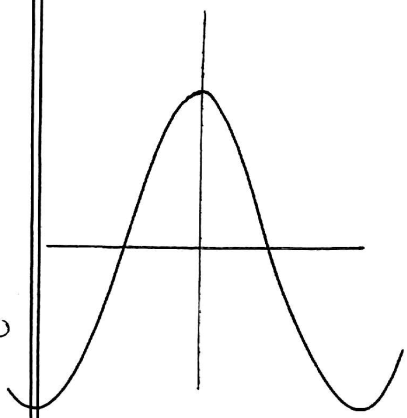
، س ≠ ن $\frac{\pi}{٢}$

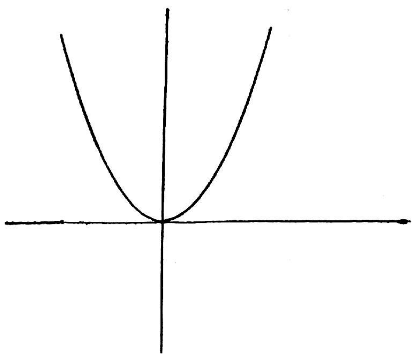
حيث ن صحيح فردي

Back to Basics

الدالة الزوجية والفردية .

① تكون الدالة زوجية إذا كانت متماثلة حول محور الصادات .





**الاختبار** $\text{د}(-\text{س}) = \text{د}(\text{س})$

① $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{2}$

$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{2} = \text{س}^{2}$

$= \text{د}(\text{س})$

زوجية

② $\text{د}(\text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{د}(-\text{س}) = \text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتاس}$

∴ جتاس دالة زوجية .

③ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{5\,\text{س}^{4}}{\text{جا}^{2}\text{س}}$

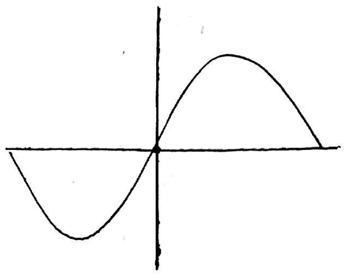
$\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{5\,(-\text{س})^{4}}{[\text{جا}(-\text{س})]^{2}} = \dfrac{5\,\text{س}^{4}}{(-\text{جاس})^{2}}$

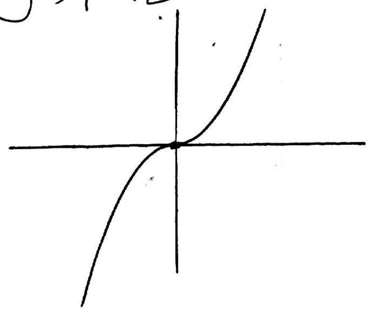
$= \dfrac{5\,\text{س}^{4}}{\text{جا}^{2}\text{س}} = \text{د}(\text{س})$

∴ زوجية .

## الدالة الفردية

تكون الدالة فردية إذا كانت الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.





**الاختبار** $\text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$

## مثال

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$

$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} = -\text{س}^{٣} = -\text{د}(\text{س})$

$\therefore\ \text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})\ \therefore$ فردية.

$\text{د}(\text{س}) = \text{جاس}$

$\text{د}(-\text{س}) = \text{جا}(-\text{س}) = -\text{جاس}$

$= -\text{د}(\text{س})$

$\therefore$ فردية.

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{-}\text{س}^{٥}}{\cancel{-}\text{ظاس}}$

$\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{(-\text{س})^{٥}}{\text{ظا}(-\text{س})} = \dfrac{\cancel{-}\text{س}^{٥}}{\cancel{-}\text{ظاس}}$

$= \dfrac{\text{س}^{٥}}{\text{ظاس}} = \text{د}(\text{س})$

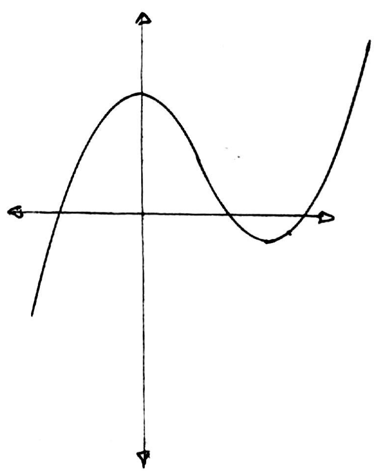
$\therefore$ زوجية

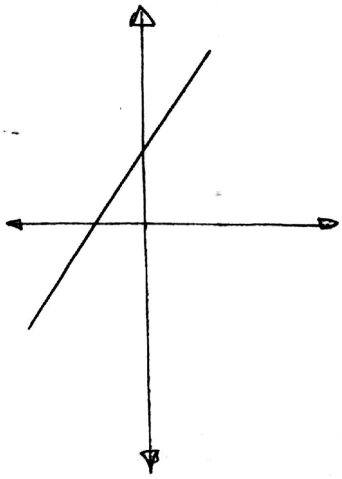
الدالة لا تكون زوجية ولا فردية إذا لم تحقق الشرطين السابقين.

الاختبار

١) د(-س) ≠ د(س)

٢) د(-س) ≠ - د(س)





مثال

د(س) = $س^3$ + $س^2$ + ١

د(-س) = $(-س)^3$ + $(-س)^2$ + ١

= $-س^3$ + $س^2$ + ١

∵ د(-س) ≠ د(س)

، د(-س) ≠ - د(س)

∴ ليست زوجية ولا فردية.

د(س) = س + ٥

د(-س) = -س + ٥

∵ د(-س) ≠ د(س)

≠ - د(س)

∴ ليست زوجية ولا فردية.

*ملاحظات إضافية

دالة فردية ≡ ف

دالة زوجية ≡ ز

ز ( ÷ × + − ) ز ← ز

مثال:
- س² جتاس
- س² / جتاس
- س² + جتاس
- س² − جتاس

دوال زوجية.

ف ( ÷ × ) ف ← ز

مثال:
- س جاس
- س / جاس

دوال زوجية.

ف ( ± ) ف ← ف

مثال:
- س + جاس
- س − جاس

دوال فردية.

Scanned by CamScanner

# أساسيات التفاضل

| الدالة | تفاضلها | أمثلة |
|---|---|---|
| $س^{ن}$ | $ن\,س^{ن-1}$ | $\frac{د}{دس}(س^{5}) = 5س^{4}$ <br> $\frac{د}{دس}(2س^{12}) = 24س^{11}$ |
| $\frac{1}{س^{ن}}$ | $\frac{-ن}{س^{ن+1}}$ | $\frac{د}{دس}\left(\frac{1}{س}\right) = \frac{-1}{س^{2}}$ <br> $\frac{د}{دس}\left(\frac{1}{س^{2}}\right) = \frac{-2}{س^{3}}$ <br> $\frac{د}{دس}\left(\frac{2}{س^{3}}\right) = \frac{-3\times 2}{س^{4}}$ |
| $\sqrt{س}$ | $\frac{1}{2\sqrt{س}}$ | $\frac{د}{دس}\sqrt{س^{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س^{2}}} \times 2س$ <br> $\frac{د}{دس}\sqrt{\frac{1}{س}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{س}}} * \frac{-1}{س^{2}}$ <br> $\frac{د}{دس}\sqrt{\sqrt{س^{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{س^{2}}}} * \frac{1}{2\sqrt{س^{2}}} \times 2س$ |
| $د(س) * ر(س)$ | $د(س) * ر'(س) + ر(س) * د'(س)$ | $\frac{د}{دس}\left[(س+1)(س^{2}+5)\right]$ <br> $= (س+1)(2س) + (س^{2}+5)(1)$ |
| $\frac{د(س)}{ر(س)}$ | $\frac{ر(س)\,د'(س) - د(س)\,ر'(س)}{ر^{2}(س)}$ | $\frac{د}{دس}\left(\frac{س^{2}+5}{س-1}\right) =$ <br> $\frac{(س-1)(2س) - (س^{2}+5)(1)}{(س-1)^{2}}$ |
| $(د(س))^{ن}$ | $ن\,(د(س))^{ن-1}\,د'(س)$ | $\frac{د}{دس}(2س^{5}+12)^{7}$ <br> $= 7(2س^{5}+12)^{6} * 10س^{4}$ |

| أمثلة | تفاضلها | الدالة |
| --- | --- | --- |
| د/دس (جاس²) = (جتاس²) × ٢س <br> د/دس (جا³س) = ٣ جا²س × جتاس | جتاس | جاس |
| د/دس (جتاص) = -جاص × دص/دس <br> د/دس (جتا ٢ع³) = -(جا ٢ع³) × ٦ع² | -جاس | جتاس |
| د/دس ظا ٥س² = قا²(٥س²) × ١٠س <br> د/دس ظا³ ٢ص = ٣ ظا² ٢ص × قا² ٢ص × ٢ دص/دس | قا²س | ظاس |
| د/دس (قا ٢ع²) = قا ٢ع² ظا ٢ع² × ٤ع | قاس ظاس | قاس |
| د/دس (قتا ٢ص) = -قتا ٢ص ظتا ٢ص × ٢ دص/دس | -قتاس ظتاس | قتاس |
| د/دس (ظتا² ٥ع) = -٢ ظتا ٥ع × قتا² ٥ع × ٥ دع/دس | -قتا²س | ظتاس |
| د/دس (م) = صفر ، د/دع (١٥) = صفر <br> د/دص (٢٩٨) = صفر | صفر | م (ثابتا) |

**تعريف التفاضل** : د/دس د(س) = نها هـ←٠ (د(س+هـ) - د(س)) / هـ

← المبادئ الأساسية.

← معدل التغير

م/ أحمد إبراهيم

## النظريات :

1) إذا كانت د(س) كثيرة حدود

فإنه $$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د(س)} = \text{د(أ)}$$

2) إذا كانت د(س) كسرية : $\text{د(س)} = \frac{\text{ر(س)}}{\text{ل(س)}}$

(أ) $\text{د(أ)} = \frac{\text{عدد} \neq \text{صفر}}{\text{عدد} \neq \text{صفر}}$ ⇐ ∴ النهاية = د(أ)

(ب) $\text{د(أ)} = \frac{\text{عدد} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⇐ ∴ النهاية غير موجودة .

3) إذا كانت د(س) كسرية : $\text{د(س)} = \frac{\text{ر(س)}}{\text{ل(س)}}$

، $\text{د(أ)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⇐ نلجأ لحذف العامل الصفري (تحليل - قسمة مطولة - المرافق)

4) $$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1 \qquad\text{،}\qquad \lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

5) $$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \text{جتا س} = 1$$

6) $$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = 1 \qquad\text{،}\qquad \lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

س مقاسة بالتقدير الدائري

7) $$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن} - \text{م}}$$

## أمثلة على النظريات:

① $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \left(س^3 + 5س^2 + 4س + 2\right) = (1)^3 + 5(1)^2 + 4(1) + 2 = 12$ .

② $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^2 + 1}{3س^5 + 4} = \dfrac{(1)^2 + 1}{3(1)^5 + 4} = \dfrac{2}{7}$

③ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^5 + 12س + 7}{س^2 - 1} = \dfrac{(1)^5 + 12(1) + 7}{(1)^2 - (1)} = \dfrac{20}{\text{صفر}}$ غير معرفة

④ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{س^2 - 4}{س - 2} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{(س+2)\cancel{(س-2)}}{\cancel{(س-2)}} = 2 + 2 = \boxed{4}$

⑤ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س-1} - 1}{س - 2} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س-1} - 1}{س - 2} \times \dfrac{\sqrt{س-1} + 1}{\sqrt{س-1} + 1} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س-1) - 1}}{(\sqrt{س-1} + 1)\cancel{(س-2)}} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

⑥ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{س^5 - 32}{س^3 - 8} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{س^5 - (2)^5}{س^3 - (2)^3} = \dfrac{5}{3} \times 2^{5-3} = \boxed{\dfrac{20}{3}}$

⑦ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}3س - \text{ظا}س}{س} \times \dfrac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\frac{\text{جا}3س}{س} - \frac{\text{ظا}س}{س}}{\frac{س}{س}} = \dfrac{3 - 1}{1} = \boxed{2}$

⑧ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}2س - 1}{\text{جا}^2س} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - 2\text{جا}^2س - 1}{\text{جا}^2س} = \boxed{-2}$

⑨ $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \dfrac{س^3 + 2س^2 - 14س - 3}{س - 3} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & س^2 + 5س + 1 \\
\hline
س - 3 & س^3 + 2س^2 - 14س - 3 \\
 & \ominus س^3 \oplus 3س^2 \\
\hline
 & 5س^2 - 14س - 3 \\
 & \ominus 5س^2 \oplus 15س \\
\hline
 & \cancel{س} - \cancel{3} \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \dfrac{(س^2 + 5س + 1)\cancel{(س-3)}}{\cancel{س - 3}} = \boxed{25}$ #

Scanned by CamScanner

# أساسيات الميكانيكا

## * أولاً الاستاتيكا

1) إذا كان أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

فإن $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{وب}} - \overrightarrow{\text{وأ}}$ = (س٢ − س١ ، ص٢ − ص١)

2) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) = س سَ + ص صَ

فإن ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ حيث ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ هو معيار أ أي مقدار أ ، طول المتجه أ .

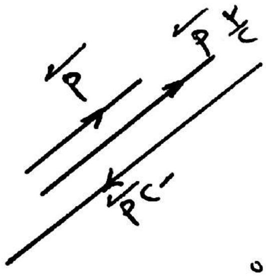
3) $\hat{\overrightarrow{\text{أ}}}$ هو متجه وحدة أي أن معياره = الواحد الصحيح ⟸ ‖$\hat{\overrightarrow{\text{أ}}}$‖ = 1

4) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س١ ، ص١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (س٢ ، ص٢) ، ك ∈ ح فإن :

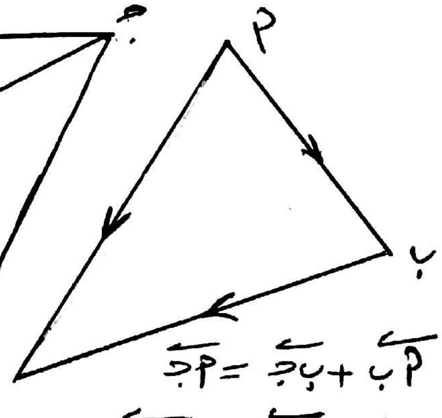
* $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = (س١ + س٢ ، ص١ + ص٢)
* $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (س١ − س٢ ، ص١ − ص٢)
* ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك (س١ ، ص١) = (ك س١ ، ك ص١)
* إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$

← إذا كانت ك موجبة فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ لهما نفس الاتجاه

← " " ك سالبة فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ في اتجاهين متضادين .

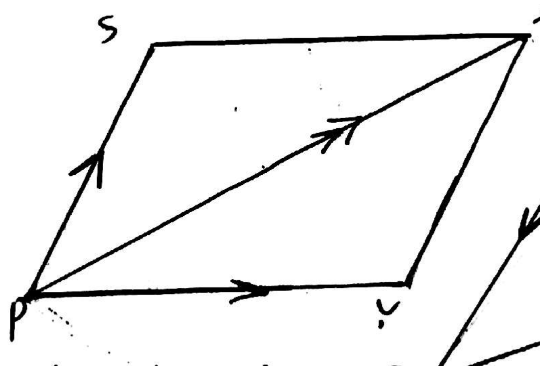



5) جمع وطرح المتجهات :

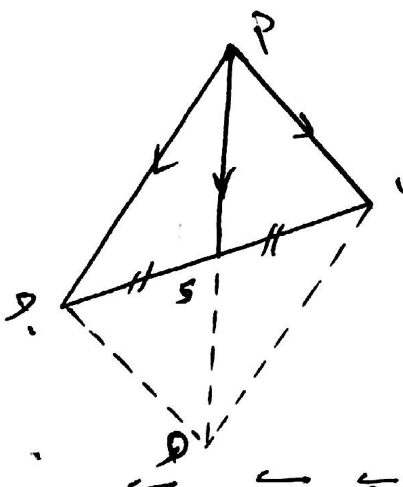



$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

$\overrightarrow{\text{أجـ}} - \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$

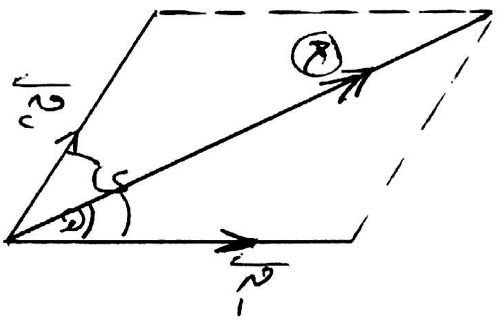



$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$




$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{أد}}$

## * محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة:




$$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتاى}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{ق_2 \text{ جاى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتاى}}$$

### الحالات الخاصة:

① القيمة العظمى: ى = صفر ، $ق_1$ ، $ق_2$ في نفس الاتجاه

$ح = ق_1 + ق_2$

② القيمة الصغرى: ى = 180° ، $ق_1$ ، $ق_2$ في اتجاهين متضادين.

$ح = ق_1 - ق_2$ حيث $ق_1 > ق_2$

③ $ق_1 \perp ق_2$

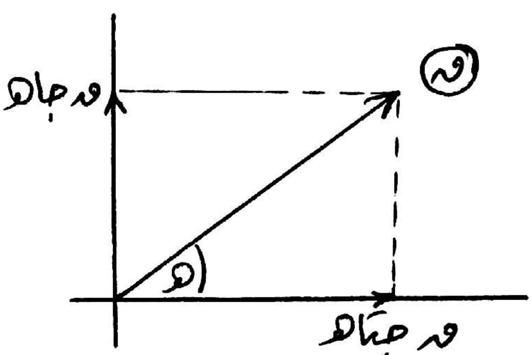
$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2$ ، $\text{ظاهـ} = \frac{ق_2}{ق_1}$

م/ محمد إبراهيم

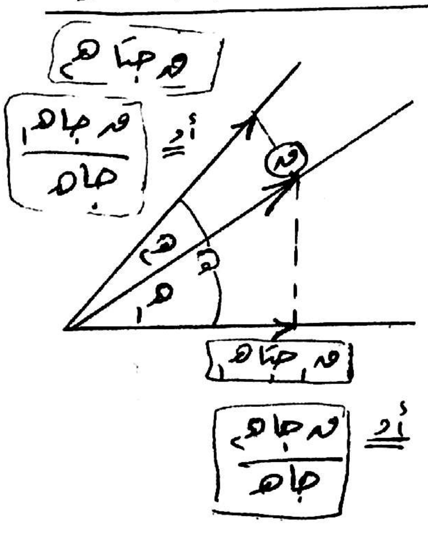
٤) $ق_1 = ق_2 = ق$

$ح = 2ق \text{ جتا } \frac{ى}{2}$ ، ى = 2هـ

## * تحليل القوة لمركبتين متعامدتين




## * تحليل القوة لمركبتين غير متعامدتين

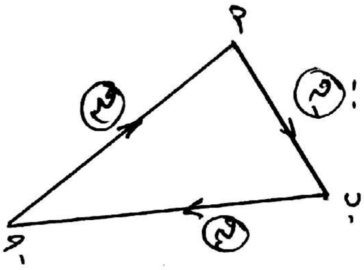


## * اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة :

### أولاً : قوتين

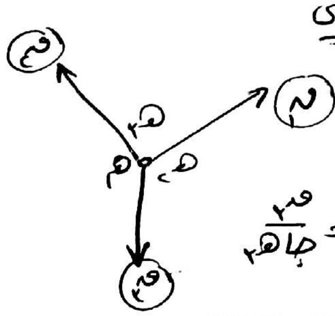
ق١ = ق٢

### ثانياً ٣ قوى



مثلث القوى :

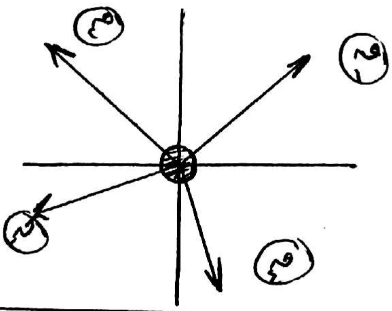
$\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{ق_3}{جـ أ}$



لامي :

$\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}$

### ثالثاً أكثر من ٣ قوى (باستخدام التحليل)



أولاً : تحليل القوى

ثانياً : مجـ س = صفر (القوى الأفقية تتلاشى)

ثالثاً : مجـ ص = صفر (القوى الرأسية تتلاشى)

**ملحوظة** : إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى بحيث التقى خطا عمل قوتين منهم في نقطة ، فلابد وأن يمر خط عمل القوة الثالثة بنفس النقطة . #

م/ محمد ابراهيم

# ثانياً: الديناميك

١) تفاضل الدوال المتجهة.

$\overrightarrow{\text{ر}}$

$\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{ر}} - \overrightarrow{\text{ر}}_0$

$\overrightarrow{\text{ع}} = \dfrac{\text{د}\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{دن}} = \dfrac{\text{د}\overrightarrow{\text{ر}}}{\text{دن}}$

$\overrightarrow{\text{ج}} = \dfrac{\text{د}\overrightarrow{\text{ع}}}{\text{دن}} = \dfrac{\text{د}^2\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{دن}^2} = \dfrac{\text{د}^2\overrightarrow{\text{ر}}}{\text{دن}^2}$

$\overrightarrow{\text{ر}}$ : متجه الموضع.

$\overrightarrow{\text{ر}}_0$ : متجه الموضع عند ن = صفر

$\overrightarrow{\text{ف}}$ : متجه الإزاحة.

$\overrightarrow{\text{ع}}$ : متجه السرعة.

$\overrightarrow{\text{ج}}$ : متجه العجلة.

**نوع الحركة:**

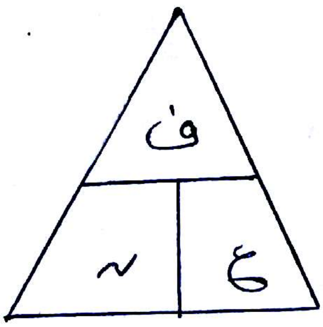
* ج = صفر ⟸ حركة منتظمة.
* ج = ثابت ⟸ حركة منتظمة التغير.
* ج = د(ن) ⟸ حركة متغيرة.
* ع ج > صفر أي $\overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{ج}}$ > صفر : متسارعة.
* ع ج < صفر أي $\overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{ج}}$ < صفر : تقصيرية.

* متجه السرعة المتوسطة : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\Delta\overrightarrow{\text{ف}}}{\Delta \text{ن}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{ف}}_2 - \overrightarrow{\text{ف}}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

* الحركة المنتظمة : عند (ج = صفر)

$\boxed{\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{ع}}\,\text{ن}}$

ف = ع ن ، ع = $\dfrac{\text{ف}}{\text{ن}}$ ، ن = $\dfrac{\text{ف}}{\text{ع}}$



## * الحركة منتظمة التغير (في خط مستقيم)

**• معادلات الحركة**

$\text{ع} = \text{ع}_0 + \text{جـ}\,\text{ن}$

$\text{ف} = \text{ع}_0\,\text{ن} + \frac{1}{2}\,\text{جـ}\,\text{ن}^2$

$\text{ع}^2 = \text{ع}_0^2 + 2\,\text{جـ}\,\text{ف}$

**• الحركة الرأسية**

$\text{ع} = \text{ع}_0 + \text{د}\,\text{ن}$

$\text{ف} = \text{ع}_0\,\text{ن} + \frac{1}{2}\,\text{د}\,\text{ن}^2$

$\text{ع}^2 = \text{ع}_0^2 + 2\,\text{د}\,\text{ف}$

حيث: ع = السرعة النهائية ، ن = الزمن

$\text{ع}_0$ = السرعة الابتدائية ، جـ = العجلة

ف = الإزاحة .

د = عجلة الجاذبية الأرضية = { + ٩,٨ م/ث² عند الهبوط ؛ - ٩,٨ م/ث² عند الصعود

ما لم يذكر خلاف ذلك .

---

## السرعة النسبية

$\vec{\text{ع}}_{\text{أب}} = \vec{\text{ع}}_{\text{أ}} - \vec{\text{ع}}_{\text{ب}}$

د/ محمد إبراهيم

* سرعة "أ" بالنسبة إلى "ب"
* سرعة "أ" كما يرصدها "ب"
* سرعة "أ" كما لو كان "ب" ساكناً

⟸ * في نفس الاتجاه : طرح

⟸ * في اتجاهين متضادين : جمع

# التحويلات

| من | إلى | اضرب في |
|---|---|---|
| ث كجم | نيوتن | ٩,٨ |
| نيوتن | داين | $١٠^{٥}$ |
| ث طن | ث كجم | $١٠^{٣}$ |
| ث طن | نيوتن | $١٠^{٣} * ٩,٨$ |
| ث جم | ث كجم | $١٠^{-٣}$ |
| ث جم | داين | ٩٨٠ |
| كم/س | م/ث | $\frac{٥}{١٨}$ |
| كم/س | سم/ث | $\frac{٢٥٠}{٩}$ |
| جول | إرج | $١٠^{٧}$ |
| حصان | ث كجم.م/ث | ٧٥ |
| حصان | وات ≡ نيوتن.م/ث | ٧٣٥ |
| حصان | كيلووات | ٠,٧٢٥ |
| كيلووات ساعة | جول | $٣,٦ * ١٠^{٦}$ |

محمد إبراهيم

تمت
بحمد
الله

#Mo Academy

01150780300